WINKEL- UND STRECKEN-GENAUIGKEIT UND IHR VERHÄLTNIS.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

GROSSHERZ. MECKLENBURGISCHEN LANDES-UNIVERSITÄT ZU ROSTOCK

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTOR-WÜRDE

VORGELEGT VON

F. STREHLOW.

OBERHAUSEN RHEINL.
BUCH- UND KUNSTDRUCKEREI RICHARD KÜHNE NACHF.
1903.

WINKEL- UND STRECKEN-GENAUIGKEIT UND IHR VERHÄLTNIS.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

GROSSHERZ. MECKLENBURGISCHEN LANDES-UNIVERSITÄT ZU ROSTOCK

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTOR-WÜRDE

VORGELEGT VON

F. STREHLOW.

OBERHAUSEN RHEINL.
BUCH- UND KUNSTDRUCKEREI RICHARD KÜHNE NACHF.
1903.

REFERENTEN:

HERR PROFESSOR DR. STAUDE UND

HERR PROFESSOR DR. MATHIESSEN.

Einleitung.

Wenn ich es im ersten Teile der vorliegenden Arbeit übernehme, die Genauigkeit der Winkel- und Streckenmessung einer eingehenden Erörterung zu unterziehen, so bin ich mir dabei wohl bewusst, dass die an ausgezeichneten Abhandlungen reiche Litteratur über diesen Gegenstand durch die bescheidene Arbeit nicht erheblich bereichert wird. Indessen entbehren diese Abhandlungen, in Zeitschriften und Handbüchern zerstreut, des inneren Zusammenhangs, und wenn es mir gelungen sein sollte, noch einige, neue Gesichtspunkte in nähere Erörterung gebracht zu haben, so darf ich wohl hoffen, dass dieser Teil der vorliegenden Arbeit nicht ganz als überflüssig zu bezeichnen ist. Hierzu kommt, dass der zweite, wichtigere Teil, das Verhältnis der Winkel- und Streckengenauigkeit, den ersten kategorisch als Vorläufer forderte, einmal, weil sonst das hier gesagte als bekannt hätte vorausgesetzt werden müssen, was vielleicht nicht so ganz am Platze gewesen wäre, dann auch, weil der erste Teil mit Rücksicht auf den zweiten, einer anderen Behandlung bedurfte, wie an anderer Stelle.

In dem zweiten Teil wird, wie bereits gesagt, das Verhältnis der Winkel- und Streckengenauigkeit eingehend untersucht, und wir werden hier durch einfache Schlussfolgerung in zwangloser Weise zur Aufstellung eines allgemeinen Prinzips für unsere Messungen hingeleitet, zu

der Forderung, dass die Querverschwenkung stets gleich der Längsverschwenkung sein muss.

Vorländer stellt diese Forderung schon auf (Ztschr. für Vermessungswesen 1876 „Fehlerausgleichung der Liniennetze aus gemessenen Längen und Winkeln"), indem er sagt: „Dabei setze ich voraus, dass der Feldmesser seine Hilfsmittel und seine Messungsverfahren so einrichtet, um sich vor der Rechnung versichert halten zu können, dass er mit dem mittleren zu befürchtenden Neigungswinkelfehler den Endpunkt einer Linie von der Länge der Maasseinheit nach der einen oder anderen Seite nicht weiter schwenkt, als es ihn vermöge der zu befürchtenden Längenmessungsfehler verschiebt oder zurücklässt." An einer anderen Stelle desselben Aufsatzes heisst es weiter: „Es wird angenommen, dass Brechungswinkel und Streckenlängen mit derjenigen Sorgfalt gemessen sind, dass allen Winkeln und allen Längen des Zuges gleiche Zuverlässigkeit zugedacht werden kann, dass insbesondere Winkel, welche Schenkel haben, die merklich kürzer sind als die mittlere Schenkellänge des Zuges, mit entsprechend grösserer Sorgfalt bei der Aufstellung des Winkelmessers und der Zielstangen, auch nötigenfalls mehr als andere Winkel beobachtet, und dass Strecken, welche der Längenmessung besondere Schwierigkeiten darboten, mit den zur Überwindung derselben nötigen Hilfsmitteln und mit vermehrter Sorgfalt gemessen sind."

Wir sehen, dass es für Vorländer bis zur Aufstellung eines allgemeinen Prinzips nur eines kleinen Schrittes bedurft hätte. Ob die Erfüllung seiner Forderung praktisch möglich, ob sie auf die von ihm angegebene Art und Weise zu erreichen ist, oder ob wir einfacher zu unserem Ziele gelangen können, darüber bleibt uns Vorländer die Antwort schuldig. In der von ihm

aufgestellten Form kann die Erfüllung seiner Voraussetzungen jedenfalls nicht als Princip gefordert werden; er bringt seine Forderung dadurch zur Geltung, dass er für seine Beobachtungen verschiedene Gewichte einführt, die streng mathematisch nicht fassbar sind. Jeder Praktiker weiss aber, dass die Einführung von Gewichten, selbst wenn sie streng mathematisch gegeben sind, nur als notwendiges Übel betrachtet werden können; um wieviel mehr muss er dann nicht gegen solche eingenommen sein, deren Feststellung einer gewissen Willkür unterliegt? Müssen derartige Gewichte bei einer Ausgleichung verwendet werden, so wird man es vorziehen, die Ausgleichung graphisch vorzunehmen, und man wird sicher sein können, auf diese Weise günstigere Resultate zu erhalten, als wenn man unter willkürlichen Annahmen eine strenge Ausgleichung ausgeführt hätte.

Alle derartige Untersuchungen über die Genauigkeit von Beobachtungen stehen in den mathematischen Wissenschaften auf der Grenze zwischen Theorie und Praxis und haben den Zweck zwischen beiden zu vermitteln. Einseitig gezogene Folgerungen sind deshalb meist wertlos. Ein rein theoretisch gewonnenes Resultat kann unter Umständen für die Praxis unmöglich zu erreichen sein; es kann z. B. von der Praxis die Anwendung einer Art der Aufnahme, eines Instrumentes erfordern, welches unmöglich in Frage kommen kann. Es muss deshalb für unsere Untersuchungen stets das Prinzip massgebend sein, theoretisch fortschreitend die Praxis im Auge zu behalten.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552723_0015

I. Teil.

I. Winkelgenauigkeit.

Die Frage nach der Genauigkeit einer Beobachtung wird mathematisch beantwortet durch die Grösse des mittleren Fehlers derselben. Dieser wird in bekannter Weise aus überschüssigen Beobachtungen abgeleitet; seine Grösse ist abhängig von der Art des dabei benutzten Instrumentes und von der Art der Aufnahme. Die letztere wird sich nun bei gegebenem Instrument von Fall zu Fall ändern können, und wir werden dementsprechend für dasselbe Instrument verschiedene mittlere Fehler erhalten. Es liesse sich dies zwar durch Einführung von Gewichten umgehen; da diese aber auf den reinen Instrumentenfehler keinen Einfluss haben dürften, sondern nur auf den durch die Art der Aufnahme gegebenen Teil, so ist dabei vorausgesetzt, dass wir diesen Teil seiner Grösse nach kennen. Es erweist sich daher als notwendig, die Gesetze der Entstehung des mittleren Fehlers kennen zu lernen, um diesen selbst beurteilen zu können.

Der mittlere Fehler einer Winkelmessung wird gebildet:

1. durch den reinen Messungsfehler (Instrumentfehler);
2. durch den Centrierungsfehler der Signale;
3. durch den Centrierungsfehler der Aufstellung des Instrumentes;
4. durch den reinen Zielfehler (Fehler der Refraktion).

Diese drei Teile sind unabhängig von einander und ihre mittleren Quadrate daher einfach zu addieren, um das mittlere Gesamtfehlerquadrat zu erhalten.

$$m_w^2 = I + II + III + IV.$$

Von diesen vier Teilfehlern sind uns bereits einige Eigenschaften durch ihre Natur bekannt. Der Fehler I wird bei jeder Art der Aufnahme je nach der Art des benutzten Instrumentes grösser oder kleiner erscheinen, während die Fehler II und III Funktionen der Schenkellängen und zwar, wie man leicht einsieht, umgekehrt proportional zum Quadrate derselben sein müssen. Da die Excentricitäten verhältnismässig sehr kleine Grössen sind, so werden diese beiden Teilfehler bei grossen Schenkellängen d. h. bei Dreiecksmessungen im Sinne der Landmessung nicht mehr in Betracht kommen. Der vierte Teilfehler ist mathematisch am wenigsten fassbar, und wenn es auch möglich ist, so werden hierbei so viele variable Faktoren mitsprechen müssen, dass eine Übereinstimmung mit der Wirklichkeit immer sehr fraglich sein würde. Dieser Fehler kann seiner Natur nach nur bei langen Ziellinien eine Rolle spielen; er wächst proportional der Länge derselben und braucht deshalb nur bei Dreiecksmessungen in Rücksicht gezogen zu werden.

Unsere Formel für den mittleren Fehler eines Winkels wird demnach dahin modifiziert werden müssen, dass gesetzt wird:

für Polygonwinkel $m_w^2 = I + II + III$

für Dreieckswinkel $m_w^2 = I + IV$

Da bei dem mittleren Fehler der Dreieckswinkel ein Faktor mitspricht, dessen Grösse selbst für gegebene Verhältnisse Schwankungen unterworfen ist, wird es sich praktisch nicht empfehlen, denselben weiter in seine Teile

zu zerlegen; es wird vielmehr hier am Platze sein, den ganzen mittleren Fehler aus Resultaten von Beobachtungen abzuleiten. Die Kenntnis des ersten Teiles unseres Fehlers, die wir ja doch der Polygonwinkel wegen erstreben müssen, wird dann eine Schätzung des zweiten Teiles wenigstens in seiner Allgemeinheit zulassen.

Der reine Winkelmessungsfehler, der Fehler des Instrumentes, entsteht hauptsächlich aus den drei Axenfehlern, dem Teilungs- und dem Ablesefehler. Hierzu kommen noch einige Fehler von geringerer Bedeutung, teils weil sie an und für sich sehr klein sind, dann auch weil sie durch die Art der Aufnahme eliminiert werden. Man unterscheidet, den drei Axen des Theodolits entsprechend, drei Axenfehler, den Fehler der Ziel- oder Kollimations-Axe, den Fehler der Horizontal-Axe und den Fehler der Vertikal-Axe.

Bezeichnet man den Fehler der Zielaxe mit c, die Höhe der Ziellinie mit h, so ist bekanntlich der dadurch projicierte Richtungsfehler

$$(c) = 2c \sin^2 \frac{h}{2}$$

Dieser Fehler ist bei einigermassen kleinem h sehr klein z. B. für $c = 10'$ und $h = 10^0$ nur $9{,}12''$ und wird ausserdem durch Durchschlagen eliminiert.

Der Fehler der Horizontal-Axe i erzeugt bei einer Höhe h der Ziellinie einen Projektionsfehler der Richtung von der Grösse

$$(i) = i \operatorname{tg} h$$

Auch dieser Fehler hat bei einigermassen horizontalen Ziellinien keine nennenswerte Grösse und wird ebenfalls durch Durchschlagen eliminiert.

Anders ist es mit dem Vertikal-Axen- oder Aufstellungsfehler. Dieser kann nicht durch Beobachtung

in beiden Lagen beseitigt werden. Bezeichnen wir ihn mit v und den Azimutwinkel von der Richtung der grössten Limbus-Neigung an gezählt mit u, so erhalten wir bekanntlich als Projektionsfehler für die Richtung

$$(v) = v \sin u \operatorname{tg} h$$

Die drei Axenfehler kombinieren sich zu einem Gesamtfehler für die Richtung

$$(s) = (c) + (i) + (v).$$

Gehen wir von dem Fehler der Richtung zu dem für den Winkel über, so erhalten wir als Gesamtfehler:

$$\Delta = c (\sec h' - \sec h) + i (\operatorname{tg} h' - \operatorname{tg} h) + v (\operatorname{tg} h' \sin u' - \operatorname{tg} h \sin u)$$

Wenn $h' = h$, so fallen die zwei ersten Glieder fort, und ist dies auch nicht der Fall, so scheiden wir dieselben dennoch durch Beobachten in beiden Lagen des Fernrohrs aus. Wir erhalten also in jedem Fall

$$\Delta' = v (\operatorname{tg} h' \sin u' - \operatorname{tg} h \sin u)$$

Dieser Wert erreicht bei gleichem h und h' sein Maximum in Bezug auf u und u', wenn $\sin u' = -\sin u$, oder wenn

$$u' - u = \pm 180^0$$

u'—u ist der zu messende Winkel; es wird also für $h = h'$ der Fehler Δ' am grössten, wenn der zu messende Winkel 180^0 ist, man erhält dann:

$$\Delta'_{max} = 2 v \operatorname{tg} h$$

Dieser Fehler kann, wie bereits erwähnt, nicht durch Durchschlagen beseitigt werden; er geht mit seiner ganzen Grösse in die Rechnung ein.

Der Fehler v der Axe wird gemessen durch den Ausschlag der Libelle; er hängt also von der Empfindlichkeit derselben ab. Diese beträgt für einen

grösseren Theodolit ca. 10", für einen kleinen Feldmess-Theodolit ca. 20" für einen Teilstrich. Nehmen wir nun an, der mittlere Fehler der Aufstellung betrage einen ganzen Teilstrich, und nehmen wir ferner an, die Höhe h betrage 20°, so hätten wir damit einen Fall geschaffen, der bei Polygonzügen vorkommen kann; es wird alsdann $\Delta = 14{,}6''$. Ein solcher Fehler darf aber nicht ausser Acht gelassen werden, um so mehr, als er mit steigendem h sehr viel grösser werden kann. Bei $h = 45°$ liefert der Axenfehler schon den doppelten Betrag als Projektion, und er wächst weiter proportional der Tangente bis zur Unendlichkeit. Sollte uns daher die Praxis einmal zwingen, eine derart steile Ziellinie zu nehmen, so werden wir den Axenfehler dadurch unschädlich machen müssen, dass wir das Instrument mit möglichster Sorgfalt nach vorheriger Prüfung aufstellen.

Im Allgemeinen wird nun in der Praxis eine Höhe $h = 20°$ selten vorkommen. Unter gewöhnlichen Umständen wird sich h wohl kaum über 3° hinaus bewegen. Hiermit erhalten wir unter Annahme des Ausschlags eines Teilstriches der Libelle einen Axenfehler für Polygonwinkel von 2", für Dreieckswinkel von 1". Ein solcher Wert würde für Polygonwinkel nicht mehr in Betracht kommen; bei Dreieckswinkeln aber wäre ein Fehler von 1" schon fühlbar. Wenn wir aber bedenken, dass dieser Fehler ein Maximalfehler ist, der einen Libellenausschlag von einem ganzen Teilstrich und dem ungünstigsten Winkel von 180° entspricht, und dass ein solcher Winkel bei einem Dreiecksnetze gar nicht vorkommen kann, so werden wir erkennen, dass der Aufstellungsfehler in Wirklichkeit weit kleiner als 1" sein muss.

Viel günstiger als der Theodolitzug wird sich der Bussolenzug in Rücksicht auf diesen Axenfehler stellen.

Hier wird nur eine Richtung beobachtet und wir haben deshalb

$$(v) = v \sin u \operatorname{tg} h$$

Dies wird ein Maximum für $u = 90^0$; es wird dann

$$(v)_{max} = v \operatorname{tg} h$$

Das Maximum ist also hier nur halb so gross als beim Theodolitzug. Hierzu kommt, dass während beim Theodolitzug das Maximum bei günstigster Form des Zuges zur Sicherheit wird, beim Bussolenzug das Vorkommen des Maximums keine grössere Wahrscheinlichkeit hat als das Vorkommen des Wertes o. Letzterer ist also dem Theodolitzug in dieser Beziehung weit über, und dies ist bei Aufnahmen in gebirgischem Terrain nicht ausser Acht zu lassen.

Der reine Winkelmessungsfehler enthält ausser dem oben besprochenen Axenfehler, den Fehler der Übernahme der Projektion von dem Instrument. Dieser ist beeinflusst von dem Fehler der Excentricität der Alhidade, dem Teilungsfehler und dem Ablesungsfehler.

Den Fehler der Excentricität der Alhidade können wir hier füglich übergehen, da er durch Ablesen an diametralen Strichen und durch das Durchschlagen des Fernrohrs ausgeschieden wird.

Die Teilungsfehler, die bei der Ausführung der Teilung des Limbus-Kreises entstehen, teilt man ihrer Natur nach in unregelmässige und regelmässige, je nachdem sie durch die Operation der Teilung an und für sich oder durch die dieselbe begleitenden Nebenumstände entstehen.

Das einfachste Mittel, eine Teilung mit Nonien-Ablesung zu untersuchen, besteht darin, dass man die Nonienlänge auf der ganzen Teilung herumträgt, und

mittelst der Überteilstriche des Nonius bestimmt, ob die Nonienlänge überall ein gleich grosses Stück der Teilung deckt. Ein auf diese Weise bestimmter Fehler ist jedoch kein reiner Teilungsfehler; er enthält noch den Fehler der Ablesung. Man kann zwar aus dem Resultat auf das Vorhandensein eines groben Teilungsfehler schliessen, denn der reine Ablesungsfehler ist bei diesem Verfahren sehr klein, da die Ablesungen stets mit der günstigsten Schätzung in der Nähe des Indexstriches vorgenommen werden.

Jordan teilt in seinem Handbuch für Vermessungskunde Bd. 2 S. 206 eine derartige Untersuchung für den Ertel'schen Theodolit der Karlsruher Sammlung mit. Dieser Theodolit wurde bei der Grossherzogl. Badischen Triangulierung 1823—1852 gebraucht. Der Limbus des Horizontalkreises hat 22 cm Durchmesser, ist in Zehntel Centes-Grade (10^{c}) geteilt und giebt an vier Nonien-Ablesungen 10 Centes-Sekunden (10^{cc}). Jordan findet bei diesem Instrument einen mittleren Fehler einer Nonien-Ablesung von 1,95 ". Eine an derselben Stelle vermittels der Teilungsfehler diametraler Striche vorgenommene Berechnung des reinen Teilungsfehlers ergab für diesen einen Wert von 1,1 ".

Ein Beispiel einer Untersuchung des regelmässigen Teilungsfehlers durch Repetitions-Messung teilt Helmert in der Ztschr. f. Verm. 1875 S. 327—341 mit. Es handelt sich um einen Theodolit von Stacke und Kammerer mit 16 cm Kreisdurchmesser, von 10′ zu 10′ geteilt, mit zwei Mikroskopen mit 50facher Vergrösserung, die Hauptzahlenwerte sind folgende:

1. Der mittlere zufällige Einstellungs- und Ablesefehler eines Mikroskops $= \pm$ 1,61".
2. Der zufällige Teilungsfehler der Striche des Horizontalkreises $= \pm$ 0,33".

3. Der Teilungsfehler diametraler Striche $= \pm 2{,}71''$.
4. Systematische Teilungsfehler wurden durch Repetitions-Messung mit Winkeln von $45{,}9^0$ und $47{,}2^0$ bestimmt; für das Mittel zweier diametraler Striche fand sich der mittlere Fehler $\pm 3''$.

Eine wertvolle Untersuchung von Teilungsfehlern ist von General Schreiber angestellt und in der Ztschr. f. Verm. 1878 S. 213 berichtet worden. Zwei gute Theodolit-Teilungen von 1872 zeigten Teilungsfehler von nur schwach ausgeprägtem regelmässigem Charakter, sodass es sich nicht lohnt, die einzelnen Beobachtungen zu korrigieren; die Teilungsfehler können vielmehr wie rein zufällige angesehen werden. Der mittlere in einer Winkelbeobachtung (wobei jede Einstellung an jedem Mikroskop auf zwei Teilstrichen abgelesen ist) enthaltene Teilungs-Fehler fand sich bei zwei Theodoliten bezw. $\pm 0{,}80''$ und $\pm 0{,}64''$ (mit $\pm 0{,}06''$ Unsicherheit der Untersuchung selbst).

Unregelmässige Teilungsfehler können niemals ganz vermieden werden; sie können jedoch auf ein Minimum beschränkt werden durch möglichst genaue Ausführung der Teilung und durch öftere Wiederholung der Messung.

Schädlicher wirken die regelmässigen Teilungsfehler. Diese müssen wir durch die Art der Beobachtung, durch Verteilung der Ablesungen auf den ganzen Teilkreis zu unregelmässigen umwandeln und dann durch Mittelbildung auf ein Minimum reduzieren.

Die oben mitgeteilten Resultate der Untersuchungen des Teilungs- und Ablesungsfehlers zeigen, dass diese selbst für die feinsten Instrumente immer grösser sind als die Axenfehler unter gewöhnlichen Umständen und bei den einfacheren Instrumenten der niedrigen Landmessung

wird dies erklärlicherweise noch mehr der Fall sein. Während aber bei den feineren Instrumenten der Teilungsfehler überwiegt, wird bei letzteren der Ablesefehler der grössere sein, denn die Genauigkeit der Teilung wird für verschiedene Instrumente verhältnismässig nicht sehr verschieden sein, während die Differenz der Ablesungsintervalle oft eine sehr grosse ist. Wir werden demnach bei Dreiecksmessungen hauptsächlich darauf Bedacht nehmen müssen, den Teilungsfehler zu beseitigen, und da dies, wie bereits erwähnt, nur durch möglichst gleichmässiges Verteilen der Beobachtungen auf den Teilkreis geschehen kann, so liegt damit die Notwendigkeit vor, die Winkelmessung zu wiederholen. Dass dadurch zugleich der Ablesungsfehler reduziert wird, kann nur für unsere Methode sprechen. Um die Einwirkung dieser beiden Fehler auf die Beobachtung noch zu verkleinern, hat man die Art der Beobachtung dahin geändert, dass für ein Vielfaches eines Winkels kein grösserer Teilungs- und Ablesungsfehler erscheinen kann als für den einfachen Winkel, und dass demnach auch der einfache, hieraus abgeleitete Winkel einen um ein ebenso vielfaches kleineren Fehler enthält; man hat die Repetitionsmessung eingeführt. Diese muss, gleichmässig auf den ganzen Kreis verteilt, als die günstigste Winkelmessung gelten.

Mit dem Begriff des Dreieckswinkels ist also eine wiederholte Beobachtung streng verknüpft; wie gross die Anzahl der Wiederholungen ist, das richtet sich jedesmal nach der vom Resultate verlangten Genauigkeit. Wenn wir daher von der Genauigkeit eines Dreieckswinkels sprechen, so ist damit nicht die Genauigkeit eines einmal beobachteten Winkels gemeint; man versteht darunter den mittleren Fehler des Dreieckswinkels, wie er in die Rechnung eingeht. Da dieser aber noch den mathema-

tisch kaum fassbaren Refraktionsfehler enthält, wird es der praktisch einzig mögliche Weg sein, ihn aus den Resultaten abzuleiten. Die Genauigkeit dieser hängt aber zum Teil von der Form der gewählten Dreiecke ab, und es wird sich fragen, ob es vorzuziehen ist, den mittleren Fehler aus den einzelnen Dreiecken oder einem System derselben oder aus dem ganzen Dreiecksnetze zu berechnen Wenn in einem Dreiecke alle drei Winkel α, β, γ gleich genau gemessen sind und in ihrer Summe einen Widerspruch geben:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^0 = w$$
$$\text{bezw. } \alpha + \beta + \gamma - (180^0 + \varepsilon) = w,$$

so hat man bekanntlich den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels α, β oder γ

$$m = \frac{w}{\sqrt{3}}.$$

Hat man mehrere unabhängige Dreiecke dieser Art, in der Anzahl p, etwa in einer Kette, so erhält man entsprechend:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3p}}$$

Auf der Konferenz der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung in Nizza 1887 wurde der Beschluss gefasst, dass für jedes System von Dreiecken ein Zahlenwert m nach der vorstehenden Formel $m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3p}}$ zu berechnen sei, welcher als Näherungswert für die Winkelmess-Genauigkeit gelten soll. Um diese Bestimmung von jeder Willkür unabhängig zu machen, bestimmte man, dass alle Dreiecke eines Netzes zugezogen werden sollen. Dieser Beschluss entsprang dem Bedürfnis bei der internationalen Erdmessung eine einfache Formel für den mitt-

leren Fehler eines Winkels zu haben, und dies ist ja auch hierdurch erreicht.

Eine derartige Berechnung kann jedoch nur als eine rohe Überschlagsberechnung gelten; sie kann nur bei einer Vergleichung solcher berechneter Grössen in Frage kommen. Wollen wir einen genauen Wert des mittleren Fehlers, mit welchem die Winkel in die Berechnung eingehen, einen mittleren Fehler der Triangulation, und nur ein solcher kann über die Genauigkeit eines vorliegenden Netzes die richtige Auskunft erteilen, so werden wir diesen nur aus der Dreiecksberechnung selbst folgern können.

Jordan giebt in seinem Handbuch f. Verm. Bd. 3 S. 167—175 verschiedene Methoden zur genauen Berechnung an. Wir brauchen deshalb hier nicht näher darauf einzugehen. Um uns einen Begriff von der Grösse des so berechneten Fehlers machen zu können, wollen wir hier eine Zusammenstellung einiger nach demselben Handbuch folgen lassen:

1. Die französische Gradmessung in Peru $m_W = \pm 3{,}65''$
2. Die Triangulierung der französischen Gradmessung in Lappland $m_W = \pm 10{,}23''$.
3. Die preussische Landes-Triangulierung $m_W = \pm 0{,}64''$.
4. Die Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer 1838 $m_W = \pm 0{,}68''$.
5. Schwerd's Basisnetz $m_W = \pm 0{,}93''$.
6. Triangulierung in Österreich $m_W = \pm 0{,}87''$.

Diese 6 Resultate zeigen uns, dass der mittlere Fehler des Dreieckswinkels trotz der Refraktion durch Wiederholung der Beobachtung auf eine Grösse gebracht werden kann, die noch unter der Grösse des reinen Winkelmessungsfehlers bei einfacher Beobachtung liegt.

Ganz anders ist das Grössenverhältnis der Teilfehler bei der Polygonwinkelmessung. Hier ist, da das Intervall der Ablesung unverhältnismässig viel grösser als bei den zur Triangulierung verwandten Instrumenten ist, der Fehler der Ablesung der grösste von den den reinen Winkelfehler bildenden Faktoren. Das zur Messung von Polygonwinkeln verwendete Instrument muss seinem Zweck, seiner umfangreichen Anwendung entsprechend mit möglichst wenig Arbeit die geforderte Genauigkeit liefern. Wie gross diese Genauigkeit sein muss, darüber können wir uns erst später schlüssig werden; soviel können wir aber schon jetzt sagen, dass dieser Genauigkeit gegenüber ein Fehler der Axen und der Teilung des Instrumentes, wie wir ihn eben kennen gelernt haben, nicht in Betracht kommen kann. Für die Axen und die Teilung unseres Instrumentes können wir im Allgemeinen eine ebenso grosse Genauigkeit fordern, wie für die feineren Instrumente, da hierdurch die Arbeit bei der Messung nicht vergrössert wird, jedenfalls aber eine solche, dass ihr Fehler nicht mehr in Betracht kommen kann.

Wir fordern von einem für unsere Zwecke brauchbaren Instrumente, dass es bei einfach kontrollierter Messung die gewünschte Genauigkeit liefert. Die Kontrollierung geschieht durch Ablesen an beiden Nonien und durch Beobachtung in beiden Lagen des Fernrohrs, denn sie macht so am wenigsten Arbeit und hat den Vorteil, dass sie auf den reinen Winkelmessungsfehler entsprechend eliminierend wirkt.

Die Genauigkeit der Winkelmessung bei Polygonzügen ist, wie wir oben gesehen haben, ausser dem oben besprochenen Fehler noch durch den Centrierungsfehler der Signale und den Centrierungsfehler der Aufstellung des Instrumentes beeinflusst. Diese mit II und III be-

zeichneten Faktoren hat Helmert in der Ztschr. f. Verm. 1877 S. 113 für einen Polygonwinkel berechnet. Wir wollen sie im Folgenden für eine einzelne Richtung entwickeln, einmal um so die Helmert'sche Schlussweise kennen zu lernen, dann aber auch um ihre Gestaltung für eine einzelne Richtung zu erhalten, wie dies beim Bussolenzug der Fall ist.

Bezeichnet s die Länge der Richtung, ε_1 die Excentricität des Signales, welche mit der Strecke s den Winkel φ_1 bildet, so ist, abgesehen vom Vorzeichen, der Winkelfehler in Sekunden

$$= \rho \frac{\varepsilon_1}{s} \sin \varphi_1$$

Der Winkel φ, wird (als arcus genommen) alle Werte von o bis 2π mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen können und zwar für jeden besonderen Wert der Excentricität ε_1. Indem nun nach dem Vorigen das mittlere Fehlerquadrat

$$II = \frac{\rho^2}{s^2} \cdot (\text{Mittelwert von } \varepsilon_1{}^2 \sin {}^2\varphi_1)$$

ist, kann man mit Rücksicht auf das Gesagte und wenn $e_1{}^2$ den Mittelwert von $\varepsilon_1{}^2$ bedeutet, setzen:

$$II = \frac{\rho^2 e_1{}^2}{s^2} \cdot (\text{Mittelwert von } \sin^2 \varphi_1)$$

Denkt man sich den Umkreis 2π in Teile vom Betrage $d\varphi_1$ geteilt, so ist die Anzahl der Teile $2\pi : d\varphi_1$ und man hat so den Mittelwert von $\sin {}^2\varphi_1$ gleich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin {}^2\varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{1}{2}$$

Oben eingesetzt wird

$$II = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 e_1^2}{s^2}$$

In ganz analoger Weise findet man als Fehler der Excentricität der Aufstellung des Instrumentes für die Richtung

$$III = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 e_2^2}{s^2}$$

Bezeichnen wir den reinen Instrumentenfehler der einfach kontrollierten Richtung mit ν^2, so erhalten wir als mittleren Gesammtrichtungsfehler

$$\mu_r^2 = \nu^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{s^4} (e_1^2 + e_2^2)$$

Der Fehler der Excentricität der Signale ist erklärlicherweise grösser als der Fehler der Excentricität der Aufstellung des Instrumentes. Wir werden der Wirklichkeit wohl am nächsten kommen, wenn wir $e_2 = e$ und $e_1 = 2\,e_2 = 2\,e$ setzen. Unter dieser Annahme wird:

$$\mu_r^2 = \nu^2 + 2{,}5\ \rho^2 \frac{e^2}{s^2}$$

Helmert fand für den Polygonwinkel

$$II = \frac{1}{2}\ \rho^2\ e_1^2 \left(\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2}\right) \text{ und}$$

$$III = \rho^2\ e_2^2 \left(\frac{1}{2\,s_1^2} + \frac{1}{2\,s_2^2} - \frac{\cos w}{s_1\ s_2}\right)$$

Der Wert für III wird am kleinsten, wenn $\cos w = 1$ wird (w = gemessener Winkel). Die für die Ausgleichung günstigste Form der Polygonzüge wirkt also bei Winkelbeobachtung mit dem Theodolit günstig auf den Fehler der Excentrizität. Es ist:

$$s_1^2 + s_2^2 - 2\ s_1\ s_2 \cos w = a^2$$

worin mit a die Verbindung der beiden Zielpunkte bezeichnet ist.

Machen wir nun für den Polygonwinkel dieselbe Annahme wie für den Richtungswinkel

$$e_2 = e \text{ und } e_1 = 2\,e_2 = 2\,e \qquad \text{so wird}$$

$$II = \rho^2\, e^2 \left(\frac{1}{s_1^{\,2}} + \frac{1}{s_2^{\,2}} \right) \text{ und}$$

$$III = {}^1\!/_2\, \rho^2\, e^2\, \frac{a^2}{s_1^{\,2}\, s_2^{\,2}}$$

Die Werte dieser beiden Gleichungen werden zugleich ein Minimum, wenn $s_1 = s_2 = s$ wird. Machen wir dies zur Bedingung und setzen zugleich $a = 2\,s$, d. h. bestimmen wir die Faktoren II und III für die günstigste Form der Züge, so wird:

$$II = 2\,\rho^2\, \frac{e^2}{s^2} \text{ und } III = 2\,\rho^2\, \frac{e^2}{s^2}$$

Die beiden Fehler der Excentrizität haben also auf das Resultat in diesem Falle gleichen Einfluss. Wir erhalten als Gesamtwinkelfehler:

$$\mu_w^{\,2} = \mu^2 + 4\,\rho^2\, \frac{e^2}{s^2}$$

Ein Vergleich dieses Resultates mit dem für die Richtung erhaltenen zeigt, dass die Faktoren II und III auf den Winkelfehler fast den doppelten Einfluss haben als auf den Fehler der Richtung. Dabei ist für die Winkelmessung noch die günstigste Form der Züge angenommen, während die Formel für die Richtung in jedem Falle gilt.

Der Fehler der Winkelmessung nimmt also allgemein mit abnehmendem s zu und nähert sich mit zunehmendem s immer mehr einer Konstanten, dem reinen Winkelfehler.

Wie gross der Beitrag ist, den die Faktoren II und III zu dem Gesamtfehlerquadrat liefern, hängt von der Grösse e ab (abgesehen von s), d. h. von der auf die Messung verwandten Sorgfalt. Nehmen wir $e = 0{,}005$ cm

— und wir werden damit die Verhältnisse der gewöhnlichen Landmessung wohl annähernd getroffen haben — so erhalten wir als Beitrag unserer Faktoren zu dem Winkelfehlerquadrat μ_w^2 für s = 100 einen Wert von über 400", einen Wert, der sehr wohl in Betracht zu ziehen ist.

2. Streckengenauigkeit.

Lange Zeit konnte man sich in massgebenden Kreisen darüber nicht einigen, wie der Fehler der Streckenmessung mit zunehmender Länge sich fortpflanzt. Es entspann sich über dieses Thema ein heftiger Kampf, hauptsächlich angeregt durch die Frage, ob die Messungen mit der Latte denjenigen mit der Kette vorzuziehen seien. Während Doll, Vorländer und andere den Standpunkt vertraten, dass der Fehler proportinal der Strecke selbst wachse — und sie glaubten diesen Standpunkt durch das in der Praxis angewandte Verfahren der proportionalen Fehlerverteilung und die Resultate einiger Versuche genügend gerechtfertigt —, vertrat Jordan schon damals die Ansicht, dass der Längenfehler proportional der Quadratwurzel aus der Länge wachse. Er wies nach, dass die Annahme, der Fehler wachse proportional der Strecke selbst, dem Grundprinzip der Methode der kleinsten Quadrate nicht entspreche, und dass man demnach mit der Aufstellung obiger Annahme die Berechtigung der Methode in Frage stelle oder sie doch für diesen Fall ausschliesse. Trotzdem vermochte er seine Gegner nicht zu überzeugen, denn diese glaubten, auf die Resultate ihrer Beobachtungen gestützt, selbst unter diesen Umständen ihre Behauptung aufrecht erhalten zu müssen. Erst als er bewies, dass die Annahme, der Fehler wachse

proportional der Quadratwurzel, die Forderung, die Fehler proportional der Länge selbst zu verteilen, als notwendige Folge nach sich zieht, verstummten seine Gegner.

Jordan sagt darüber in der Ztschr. f. Verm. 1876, S. 175:

„Für die Längenmessungsfehler soll die Annahme gemacht werden, dass sie mit der Quadratwurzel der Länge wachsen oder $\Delta l = k\sqrt{l}$.

Der gradlinige Abstand zweier Fixpunkte sei L; die Messung soll aber einen Widerspruch w ergeben, indem für L der Wert L + w erhalten wird. Ein Punkt sei festgelegt durch den gemessenen Abstand l vom ersten Fixpunkt und den gemessenen Abstand l' vom zweiten Fixpunkt; der wahre Abstand vom ersten Fixpunkt sei dagegen gleich x. Nun hat man zwei Bestimmungen für x, nämlich:

$$1.)\ x = l \qquad 2.)\ x = L - l'$$

Der gemachten Annahme zufolge ist das Gewicht der ersten Messung $p_1 = \frac{1}{l}$ und das Gewicht der zweiten Messung $p_2 = \frac{1}{l'}$ oder der wahrscheinlichste Wert von x:

$$x = \frac{p_1\, l + p_2\, (L - l')}{p_1 + p_2} = \frac{l}{l + l'}\, L$$

Da aber $L = l + l' - w$, so erhält man

$$x = l - \frac{l}{l + l'}\, w = l - \frac{l}{L}\, w$$

d. h. der Widerspruch wird auf die zwei Strecken l und l' ihnen selbst proportional verteilt."

Es erscheint also das allgemein in der Praxis gebräuchliche Verfahren, die Längenmessung proportional den Längen selbst zu verteilen nach der Fehlertheorie als eine Folgerung aus der Annahme, dass der mittlere Fehler

proportional der Quadratwurzel der Länge und nicht proportional der Länge selbst wächst.

Es fragt sich nun, ist die von Jordan gemachte Annahme auch richtig, ist es unmöglich, dass der Fehler der Längenmessung proportional der Länge selbst wächst? An und für sich folgt auch aus dieser Annahme die Notwendigkeit, den Fehler proportional der Strecke selbst zu verteilen, und wenn wir demnach für die Berechtigung unserer Annahme keinen anderen Beleg haben, als den der Verteilung, so ist uns um nichts geholfen. In der That sprechen ja auch, wie wir bereits gesagt haben, mehrere praktische Versuche für die zweite Annahme. Sollte also die erste Annahme nach den Prinzipien der Fehlertheorie die richtige sein, so wäre damit nur der Beweis erbracht, dass die Praxis diesen Prinzipien nicht folgt, oder es wären damit die Resultate der Versuche angezweifelt.

Nach der Fehlertheorie erhalten wir, wenn eine Länge l durch n-maliges Aneinanderlegen der Massstablänge λ erhalten wird, also

$$l = n \cdot \lambda$$

und jede Massstab-Anlage den mittleren Fehler $\pm m$ hat, für den Gesamtfehler den Betrag:

$$m_l = m \sqrt{n}$$

Nun ist

$$n = \frac{l}{\lambda}$$

also

$$m_l = m \sqrt{\frac{l}{\lambda}} = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{l}$$

Hier sind aber m und λ konstant, d. h. für eine gewisse Art von Längenmessung unabhängig von l; wir setzen deshalb

$$\frac{m}{\sqrt{\lambda}} = \mu$$

d. h. μ ist der mittlere Fehler für die Längeneinheit $\lambda = 1$. Dies giebt: $m_l = \mu \sqrt{l}$

Damit ist der Beweis für die Richtigkeit der Annahme Jordan's erbracht.

Wollen wir nun die Resultate der Versuche als solche nicht anzweifeln — und dies können wir mit Rücksicht auf die vorliegenden Beobachtungen und die Resultate mehrerer unabhängiger Versuche nicht wohl thun —, so müssen wir annehmen, dass bei den Längenmessungsfehlern noch Fehlergrössen mitwirken, die von der Fehlertheorie, so wie sie in diesem Fall angewandt worden ist, nicht berücksichtigt werden.

In der That zieht die Methode der kleinsten Quadrate nur die unregelmässigen Fehler in Betracht, für die die Wahrscheinlichkeit positiven und negativen Auftretens gleich gross ist und fordert von der Art der Beobachtung, dass sie so ausgeführt wird, dass die regelmässigen Fehler eliminiert werden. Nun sind aber alle unmittelbaren Längenmessungen mehr oder weniger mit solchen regelmässigen, einseitig wirkenden Fehlern behaftet, z. B. erzeugt das Ausweichen aus der geraden, horizontalen Richtung nach rechts oder links, nach oben oder unten, ferner bei Messungen mit Band oder Kette das Einschlagen derselben unter allen Umständen einen positiven Fehler, d. h. das Resultut wird infolge dieses Fehlers zu gross erhalten. Es sind aber auch Fehlerursachen denkbar, welche das Ergebnis stets verkleinern, wozu namentlich die Lattenunsicherheiten selbst gehören.

Diese Fehler sind zum Teil subjektiven Ursprungs und können durch Anwendung besonderer Sorgfalt, durch Ausführung der Messung von zwei verschiedenen Personen, durch Messen in beiden Richtungen und durch vorheriges genaues Prüfen des benutzen Instrumentes auf

ein Minimum reduziert werden. Bei der Basismessung können wir in der That hoffen, dass infolge der Sorgfalt der Beobachtung regelmässige Fehler das Ergebnis nicht mehr beeinflussen; für die gewöhnlichen Messungen können wir dies jedoch nicht sagen.

Über die Grösse des regelmässigen Fehlers fehlt es uns durch die unmittelbare Beobachtung selbst an jedem Anhalt. Durch die Übereinstimmung vieler Messungen einer Strecke, und selbst dann, wenn unendlich viele Beobachtungen vorlägen, wäre demnach noch nicht der wahre Wert dieser Strecke dokumentiert; wir können daraus nur einen Schluss auf die wahrscheinlichste Länge ziehen.

Dementsprechend ist auch der oben gefundene Fehler ein wahrscheinlichster mittlerer Fehler und hat als solcher seine vollste Berechtigung innerhalb des Wirkungskreises der Methode der kleinsten Quadrate. Wollen wir aber einen Überblick über die wirkliche Genauigkeit der Längenmessung erhalten, so müssen wir ihren wahren Fehler zu fassen suchen; wir müssen auch die regelmässigen Fehler in Betracht ziehen. Ein solcher wahrer mittlerer Fehler, der nicht an die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit für positive und negative Einzelfehler gebunden ist, wird als das richtigste Genauigkeitsmass für solche Messungen benutzt werden müssen, bei welchem einseitig wirkende Fehlerquellen vorhanden sind; doch darf natürlich ein wahrer mittlerer Fehler, welcher konstante Teile enthält, nicht ebenso weiter behandelt werden, wie ein mittlerer Fehler, welcher solche Teile nicht enthält.

Der Fehler der Längenmessung wird demnach zwei Elemente enthalten müssen, von welchen das erste als Repräsentant des unregelmässigen Fehlers der Quadratwurzel der Streckenlänge proportional sein muss, während

das zweite, welches durch die regelmässigen Fehler gebildet wird, mit dem Wachsen der Strecke selbst zunehmen muss. Bezeichnen wir mit a und b zwei Konstanten (Einheitsfehler), so erhalten wir als Gesamtfehler

$$m_s = \sqrt{(a\sqrt{s})^2 + (bs)^2} = \sqrt{a^2 s + b^2 s^2}$$

Wie sich das Verhältnis der beiden Teilfehler zu einander verhält, kann allgemein nicht festgestellt werden; es müsste für jeden vorliegenden Fall besonders bestimmt werden. Jedenfalls aber zeigt uns die obige Gleichung, dass der regelmässige Teil des Streckenfehlers mit zunehmendem s viel rascher wächst als der unregelmässige. Von einer gewissen Grenze ab und unter gegebenen Umständen wird es möglich sein, dass ersterer so sehr vorherrscht, dass der zweite nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht, und dann haben wir den durch die erwähnten Versuche festgestellten Fall, dass der Fehler proportional der Strecke selbst wachse.

Legen wir die von der preussischen Katasteranweisung geforderte Genauigkeit für Längenmessungen zu Grunde, so haben wir als zulässige Abweichung zweier unabhängiger Messungen (hin und her) der Länge s auf mittelmässig günstigem Terrain

$$d = 0{,}01\sqrt{6s + 0{,}0075\, s^2}$$

Bezeichnen wir den mittleren Fehler mit m, so ist

$$d = 3\, m\sqrt{2} = 4{,}243\, m$$

folglich

$$m = \frac{0{,}01}{4{,}243}\sqrt{6s + 0{,}0075\, s^2}$$

$$= 0{,}00236\sqrt{6s + 0{,}0075\, s^2}$$

Hiernach liefert schon für s = 800 der regelmässige Fehler zu dem Gesamtfehler den gleichen Beitrag wie der unregelmässige.

Es muss jedoch hierbei berücksichtigt werden, dass obige Formel für den mittleren Fehler aus der amtlich festgestellten erlaubten Differenz zwischen zwei Messungen berechnet ist. Diese Differenz bringt aber im allgemeinen, wie aus dem Gesagten ersichtlich ist, den regelmässigen Fehler nur zum Teil zum Ausdruck, und es ist anzunehmen, dass dieser einen weit grösseren Einfluss auf den Gesamtfehler ausübt.

Wir zerlegen den gesamten, wahren regelmässigen Fehler in zwei Teile, wovon der eine durch die Art der Aufnahme zum Vorschein gebracht, in der Differenz zweier Messungen zum Ausdruck kommt, während der zweite mehr oder minder jeder Messung als notwendiges Übel anhaftend durch Wiederholung und Mittelbildung nicht reduziert werden kann.

Beide Fehlerteile werden als regelmässige Fehler proportional den Längen selbst wachsen müssen. Während aber der eine mit dem unregelmässigen Fehler zusammen einen Fehler bildend gleichsam selbst durch die Art der Beobachtung zum unregelmässigen Fehler geworden ist, wird der zweite Teil unabhängig hiervon ein besonderes Element bilden. Nehmen wir an, für den letzteren sei die Einheit k, für den ersteren l, so wird

$$m_s = ks + \sqrt{a^2 s + l^2 s^2}$$

Der Faktor k wird seiner Natur nach hauptsächlich von der Art des zur Beobachtung verwendeten Instrumentes abhängen; er wird für ein gegebenes Instrument gleich bleiben müssen. Die Faktoren a und l dagegen ändern sich mit dem Instrument, der auf die Beobachtung verwendeten Sorgfalt und der Anzahl der Wiederholungen derselben. Letzteres ist von ganz besonderer Wichtigkeit, denn, wenn schon bei einfacher Messung und wachsender

Länge der Fehler immer mehr proportional dieser selbst wird, so wird, da bei Verwendung des arithmetischen Mittels aus mehreren Messungen der zweite Teil unseres Fehlers entsprechend kleiner wird, während der erste seiner Grösse nach bestehen bleibt, dies dann noch mehr der Fall sein müssen.

Die Praxis fordert eine wenigstens einfache Kontrollierung unserer Beobachtungen und gibt uns hierfür in der Wiederholung das bequemste Mittel an die Hand. Für eine derart einfach kontrollierte Messung werden die Faktoren a^2 und l^2 entsprechend reduziert, und wir nähern uns demgemäss für die Fehlerfortpflanzung der Form $r \cdot s$ viel rascher als dies bei einfacher Messung der Fall ist.

Es wäre sehr interessant die Werte der Grössen a, k und l kennen zu lernen, besonders aber den Wert der Grösse k.

Der Gang einer derartigen Untersuchung wäre etwa folgender:

Wir messen mehrere sehr grosse Strecken, deren im Verhältnis zu der vorliegenden Messung wahre Länge uns bekannt ist. Solche Längen sind uns in den Basisstrecken gegeben. Auf diese Weise erhalten wir die Differenz w unserer Messung gegen den wahren Wert und es wird:

$$ks + \sqrt{a^2 s + l^2 s^2} = w \quad \text{oder}$$

$$k + \sqrt{\frac{a^2}{s} + l^2} = \frac{w}{s}$$

In dieser Gleichung ist nun die Grösse $\frac{a^2}{s}$ infolge der grossen Länge von s und der geringen Grösse von a^2

gegenüber den anderen Werten so klein, dass sie vernachlässigt werden kann. Wir erhalten demnach

$$k + l = \frac{w}{s}$$

Nun würde es unsere Aufgabe sein durch Ausführung von Doppelmessungen verschiedener Längen den mittleren Fehler derselben festzustellen, um dann vermittelst derselben die Grössen a und l, bezw. l allein zu berechnen. Damit ist auch die Grösse von k gefunden.

Eine derartige Untersuchung würde uns jedoch zu weit führen und gehört der uns gestellten Aufgabe entsprechend auch nicht in den Rahmen dieser Arbeit. Wir begnügen uns damit die Gleichung für die Fortpflanzung der Längenmessungsfehler als solche festgestellt zu haben.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass man versucht hat, das Gesetz der Fehlerfortpflanzung der Längenmessung den in der Praxis enthaltenen Resultaten anzupassen.

Löschner teilt uns in seiner Inaugural-Dissertation „Genauigkeitsmessung für Längenmessungen“ (Hannover 1902) Versuchsmessungen mit, die er mittelst der von ihm konstruierten Apparate ausgeführt hat

A. auf einem bekiesten Fussweg mit holperigen Stellen;
B. auf Asphaltpflaster;
C. auf durchweg ebenem Boden, jedoch ohne Spannapparat

und diskutiert an der Hand dieser drei Versuchsreihen das Verhalten der Formen:

1. $m = \mu \sqrt{s}$
2. $m = \alpha + \beta s$
3. $m = \alpha s + \beta \sqrt{s}$
4. $m = \sqrt{\alpha s + \beta s^2}$
5. $m = a s + b$ und nachfolgend $m = \sqrt{a s + b}$
6. $m = as + b$ und nachfolgend $m = a \sqrt{s} + b$

für den mittleren Längenmessungsfehler bezüglich der Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen.

Löschner findet, dass den letzteren in absteigender Linie entsprechen

in der Versuchsreihe A die Reihenfolge 6 3 5 2 4 1
„ „ „ B „ „ 2 3 6 5 1
„ „ „ C „ „ 3 6 5 2 1 4

Es erscheint hiernach die Form 3 als die beste. Aber auch die Form 6, mit linearem Fortschreiten des mittleren Fehlers bis etwa 300 m Länge, giebt eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungswerten. Die von der Katästeranweisung acceptierte Form 4 erscheint dagegen, wie auch 1, am ungeeignetsten zur Darstellung des Fehlergesetzes für die Längenmessung.

Die Form

$$m = \alpha + \beta s$$

für den mittleren Längenmessungsfehler — in den im Polygonnetz vorkommenden Grenzen für s — hat auch schon Prof. Dr. Reinhertz 1896 im Anschluss an die Ergebnisse der Nachmessung der Bonner Basis mit Latte und Massband vorgeschlagen.

Diese Ergebnisse zeigen, dass bei der Bildung des Längenmessungsfehlers zweifellos Fehlerquellen mitwirken, für welche das Vorkommen gleich grosser, positiver und negativer Einzelfehler nicht gewährleistet ist.

Wir wählen zum Ausgangspunkt für unsere Erörterungen die mit der Fehlertheorie in Übereinstimmung stehende Form 4, indem wir es dahingestellt sein lassen, ob durch Vorherrschen der einen oder anderen Fehlerquelle eine der anderen Formen entsteht und können dies umso unbedenklicher thun, als die anderen in Frage kommenden Formen sich unserem Prinzip weitaus günstiger anschliessen als die zu Grunde gelegte.

II. Teil.

Das Verhältnis von Winkel- und Streckengenauigkeit.

I. Allgemeines.

Wollen wir aus vorliegenden Beobachtungsgrössen die wahrscheinlichsten Werte anderer mit ihnen in bestimmter Beziehung stehender Grössen ermitteln, so müssen wir von dem Grundsatz ausgehen: Die gesuchten Grössen als einheitliches Endergebnis aus sämtlichen vorliegenden Bestimmungen derart zu gewinnen, dass jedes Beobachtungsergebnis **seinem Gewichte entsprechend** berücksichtigt wird. Erst bei Befolgung dieses Grundsatzes kann uns die Methode der kleinsten Quadrate Grössen liefern, die wir als die wahrscheinlichsten bezeichnen können.

Dieser Grundsatz darf aber nicht nur da massgebend sein, wo die Methode als Mittlerin bei der Berechnung auftritt; er muss vielmehr bei allen durch Messungen zu lösenden Aufgaben als solcher bestehen bleiben, denn es liegt kein Grund vor, eine Messung auf Kosten der anderen vorzuziehen, und unser Grundsatz fordert ja nur gleiches Recht für gleich genaue Beobachtungen.

In der vorliegenden Form zwingt uns unser Grundsatz Gewichte in die Berechnung einzuführen und zwar streng genommen in jedem Falle, denn jeder Winkel hat wie wir gesehen haben, je nach der Länge seiner Schenkel, jede Strecke je nach ihrer Länge ein anderes Gewicht. Eine derart strenge Berücksichtigung der Genauigkeit ist

aber für die einfachen Aufgaben der Landmessung unmöglich, für die der höheren Geodäsie sehr umständlich.

Viel einfacher in der Befolgung wird unser Grundsatz sein, wenn wir ihn zu der Forderung umgestalten: Unsere Beobachtungen müssen gleich genau ausgeführt, unsere Messungen müssen so angeordnet werden, dass die Beobachtungen als gleichgewichtig bezeichnet werden können. Eine derartige Anordnung nennen wir die günstigste.

Unser Grundsatz in seiner ersten Form fordert schon von uns, die Genauigkeit der Winkelmessung mit der der Lägenmessung in Verhältnis zu bringen, denn die Forderung der Berücksichtigung der Gewichte bei allen Beobachtungen setzt für die beiden Arten der Beobachtung eine gleiche Gewichtseinheit voraus; es muss festgestellt werden, unter welchen Bedingungen Winkel- und Längenmessungen als gleich genau in Rechnung gestellt werden können.

Die im Interesse der Einfachheit und der rationellen Ausgleichung unserer Aufnahmen aus diesem Grundsatz gefolgerte Forderung, der Grundsatz in seiner zweiten Form, verallgemeinert dies und fordert für alle Messungen gleiche Genauigkeit, gleiche mittlere Fehler. Wollen wir aber die mittleren Fehler von Winkel und Länge zu einander in Beziehung bringen, so müssen wir beide auf ein gleiches Mass umrechnen und zwar praktisch den Winkelfehler durch ein Längenmass ausdrücken. Wir bezeichnen ihn so als Querverschwenkung, den mittleren Fehler der Länge dementsprechend als Längsverschwenkung, und unser Grundsatz lautet nun: die Querverschwenkung muss gleich der Längsverschwenkung sein.

Wird uns die Aufgabe gestellt, einen Punkt von zwei gegebenen Punkten aus festzulegen, so kann dies mit reiner Winkelmessung, mit reiner Streckenmessung

und mit kombinierter Strecken- und Winkelmessung geschehen entsprechend den drei Konstruktionen dieses Punktes. Die Ausführungen für Festlegungen mittelst reiner Winkelmessung und reiner Streckenmessung müssen unter Zugrundelegung unseres Prinzips zu demselben Resultate führen. Wir werden deshalb die reine Streckenmessung, die ohnehin in der Geodäsie jetzt keine Rolle mehr spielt, übergehen und uns auf die reine Winkelmessung, die in der Dreiecksmessung praktischen Ausdruck findet, beschränken können.

Hier tritt nur eine Art der Messung auf, und wir können auch demnach a priori nur von einer Querverschwenkung sprechen. Erst durch die Aufnahme kommt der zweite Fehler, die Längsverschwenkung zur Wirkung, und unsere Forderung lautet nun: Die Aufnahme muss derart angeordnet werden, dass unser Grundsatz als solcher gewahrt bleibt.

Strahle ich einen Punkt von einem gegebenen Punkte aus an mit einem mittleren Winkelfehler $\pm$ m, dem für die vorliegende Länge des Strahles eine Querschwenkung $\pm$ q entspricht, so ist damit nur gesagt, dass der Strahl in der Entfernung $\pm$ q an dem Punkte vorbeigeht. Die zweite, zu dieser rechtwinklige Fehlerrichtung kann erst erscheinen, wenn durch einen Strahl von einem zweiten Punkte aus der gesuchte Punkt unter denselben Bedingungen wirklich festgelegt wird. Die Forderung unseres Prinzips ergiebt nun eine bestimmte Lage der gegebenen Punkte zu dem gesuchten, eine bestimmte Form des zur Anwendung kommenden Dreiecks. Im vorliegenden Falle muss es, wie man leicht einsieht, die Form des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks sein.

Wir hatten oben diejenige Anordnung der Messung, welche uns die Gleichgewichtigkeit der Beobachtungen

gewährleistet, als die günstigste bezeichnet und aus der Gleichgewichtigkeit der Beobachtungen unser Prinzip für kombinierte Messungen gefolgert.

Bei der einfachen Winkelmessung ist uns mit dem mittleren Winkelfehler nur die Grösse der Querverschwenkung gegeben, während die Längsverschwenkung erst durch die Form der Dreiecke ihrer Grösse nach bestimmt ist. Es tritt also an Stelle der von der Längenmessung geforderten Genauigkeit die Form des zur Anwendung gekommenen Dreiecks, und wir müssen daher diejenige Form als die günstigste bezeichnen, welche die Befolgung unseres Prinzips gewährleistet. Hier kommt also das Verhältnis der Winkel- und Streckengenauigkeit erst durch die Art der Aufnahme zur Wirkung; wir brauchen deren Grösse nicht festzustellen, und dies ist von grosser Wichtigkeit, weil die Winkelgenauigkeit für Dreiecksmessung, wie wir gesehen haben, kaum ihrer Grösse nach fassbar ist. Die Bedingungen unseres Prinzips gelten also allgemein für einfache, direkte Festlegung und führen im einfachsten Falle der Festlegung eines Punktes durch den Schnittpunkt zweier Strahlen auf das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck als das günstigste. Dass diese Definition des günstigsten Dreiecks mit der allgemein üblichen des kleinsten mittleren Fehlers des Punktes übereinstimmt, geht daraus hervor, dass der mittlere Abstand des gesuchten Punktes von dem wahren auf diese Weise möglichst klein, gleich m | 2 wird. Ist die Summe zweier Genauigkeiten 2 m für zwei Richtungen gegeben, so wird ihre Resultierende für die rechtwinklige Richtungen unter gleicher Verteilung der Genauigkeit auf beide Richtungen am kleinsten.

Fassen wir nach Heuke (Über die Methode der kleinsten Quadrate von Prof. Dr. Heuke) die Methode

der kleinsten Quadrate als Bildnerin solcher Grössen auf, welche der Wahrheit möglichst nahe liegen, so haben wir unter Zugrundelegung unseres Prinzips den Forderungen der Methode durch die Art der Aufnahme genügt.

Unser Grundsatz gilt in dieser einfachen Weise bei einfach, direkter Festlegung eines Punktes; es fragt sich nun, wie wird sich unser Prinzip gestalten, wenn überschüssige Messungen vorliegen.

Wir erhalten durch jede überschüssige Messung einen neuen geometrischen Ort für die Festlegung eines Punktes, und jede Kombination zu zweien derselben liefert einen Beobachtungspunkt. Während wir bei einfacher Festlegung einen Punkt als Schnittpunkt zweier Richtungen erhalten, liefert die überschüssige Beobachtung das dritte Stück zur fehlerzeigenden Figur. Hier haben wir mehrere Quer- und Längsverschwenkungen, und es wird nicht möglich sein, allgemein unser Prinzip für sämtliche Richtungen zugleich in aller Strenge zur Geltung zu bringen.

Wir haben unser Prinzip aus der Forderung abgeleitet, die Beobachtung so anzuordnen, dass die Einführung von Gewichten unnötig wird, aus der Bedingung gleicher Genauigkeit der Beobachtungen. Diese Bedingungen gelten allgemein und müssen deshalb auch für überschüssige Beobachtungen massgebend bleiben. Es folgt daraus für die günstigste Lage eines gedachten Punktes die Forderung gleicher Entfernung von den gegebenen Punkten und für die Beobachtung die Forderung gleicher Querverschwenkung für alle Richtungen.

Für das Verhältnis der Querverschwenkung zur Längsverschwenkung müssen wir uns damit begnügen, unsre Forderung nach Möglichkeit zugleich für sämtliche Strahlen zu erfüllen, indem wir für unsere Aufnahmen die Be-

dingung stellen, das Verhältnis der Querverschwenkung zu Längsverschwenkung soll für alle Richtungen sich zugleich möglichst dem Werte 1 nähern. Dies wird erfüllt, wenn die fehlerzeigende Figur bei n überschüssigen Beobachtungen nfach symmetrisch zu der wahren Lage des gesuchten Punktes ist.

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert, wie bereits Legendre gezeigt hat, für ein gegebenes System von Punkten den Schwerpunkt des Punktsystems als den wahrscheinlichsten. Für ein symmetrisches Punktsystem fällt der Schwerpunkt mit dem Centrum der Symmetrie zusammen. Ist demnach ein Punkt so beobachtet, dass die fehlerzeigende Figur symmetrisch zu dem wahren Punkte ist, so fällt der wahrscheinlichste mit dem wahren Punkt zusammen; eine solche Art der Aufnahme muss aber füglich als die günstigste bezeichnet werden.

Die Forderung der Symmetrie der fehlerzeigenden Figur hat als notwendige Folge die Forderung der Lage des gesuchten Punktes im Mittelpunkte der Symmetrie der gegebenen Punkte. Die Aufnahme ist also die günstigste, welche den gesuchten Punkt aus zu ihm symmetrisch liegenden gegebenen Punkten ableitet.

Das Centrum der Symmetrie ist zugleich Mittelpunkt für den dem gegebenen Polygon umschriebenen und für den eingeschriebenen Kreis, und man kann deshalb einen Schritt weiter gehend für ein beliebiges gegebenes Punktsystem diejenige Punktlage als die günstigste bezeichnen, für welche der Abstand des Mittelpunktes des umschriebenen von dem des eingeschriebenen Kreises ein Minimum wird.

Die Frage nach den mathematischen Folgerungen dieser Forderung müssen wir hier offen lassen; für den speziellen Teil unserer Arbeit kann es nur Aufgabe sein

festzustellen, dass die Erfüllung unseres Prinzipes für einfache wie mehrfache Festlegung eines Punktes diese als die günstigste dokumentiert.

Ganz anders wird sich unsere Betrachtung gestalten müssen, wenn wir die Forderung unseres Grundsatzes für kombinierte Längen- und Winkelmessung, für Polygonmessung untersuchen. Hier liegen direkt beobachtete Längen und Winkel vor, und wir müssen demnach die Erfüllung der Forderung unseres Prinzips von den Beobachtungen selbst erwarten; wir müssen diese so ausführen, dass sie als gleichgewichtig betrachtet werden können. Das Gewicht, die Genauigkeit einer Beobachtung hängt ab von der Genauigkeit der Wirkungsweise des benutzten Instrumentes und von der Sorgfalt, mit der die Beobachtung vorgenommen wird, und es wird unsere Aufgabe sein, beide so anzuordnen, dass die Querverschwenkung gleich der Längsverschwenkung wird.

Im Allgemeinen ist uns die Genauigkeit der Längenmessung ihrer Grösse nach für Polygonseiten praktisch gegeben. Die Modifikation derselben durch Anwendung der Latte, des Messbandes oder der Kette ist so gering, dass die amtliche Anweisung für die Verwendung aller drei Instrumente gleiche Maximalfehler vorschreibt, und, wenn man die Lattenmessung als günstigste anerkennend allein zu Grunde legt, so kann damit die Genauigkeit der Längenmessung als gegeben betrachtet werden.

Anders ist es bei der Winkelmessung. Hier kann nur der durch die Sorgfalt der Beobachtung bedingte Fehler der Excentricität als gegeben anerkannt werden, während der reine Winkelfehler, wie wir gesehen haben, je nach dem vorliegenden Instrument grosser Modifikationen

fähig ist. Abgesehen davon, ob Winkelmessung oder Richtungsmessung, ob Theodolith oder Bussole angewendet wird, ist die Genauigkeit je nach der Konstruktion des Instrumentes, je nach seinem mittleren Teilungs- und Ablesefehler eine sehr verschiedene, und wir werden deshalb im Wesentlichen unser Prinzip durch Abänderung der Konstruktion gegebenen Falls zur Geltung bringen müssen.

Nehmen wir an, wir hätten einen Punkt durch Beobachtung des Winkels von einer gegebenen Richtung aus und durch Messung der Länge des Strahles festgelegt, so fordert unser Prinzip, dass der Strahl entweder nach rechts oder nach links um ebensoviel vorbeigeht, als die Messung über den wahren Punkt hinausgeht oder hinter ihm zurückbleibt. Da dieses Prinzip ein allgemeines sein soll, da es für jeden Punkt gelten soll, so muss es unabhängig von der Länge des Strahles sein. Ist es für eine beliebige Länge s_1 zur Geltung gebracht, so muss es auch für jede andere Länge s gelten. Diese Forderung ist naturgemäss eine Forderung der gleichen Fortpflanzung des Winkel- und Streckenfehlers bei wachsender oder abnehmender Streckenlänge. Ob dies thatsächlich vorliegt, kann nur auf Grund einer besonderen Untersuchung im speziellen Teil dieser Arbeit festgestellt werden.

Sollte sich die Unmöglichkeit der Erfüllung dieser Forderung herausstellen, so wäre unser Prinzip als solches trotzdem nicht hinfällig. Wir müssten es dann für ein bestimmtes s geltend machen und von der Anordnung der Beobachtung fordern, dass innerhalb gewisser Grenzen nur diese Strahlenlänge zur Festlegung in Anwendung gebracht würde. Wenn sich dann für diese Grenzen die Unterschiede in der Fehlerfortpflanzung nicht geltend machen, so kann damit unsere Forderung für die vorliegende Art der Aufnahme als erfüllt gelten.

Hiermit haben wir unsern Grundsatz für einfache Festlegung eines Punktes durch kombinierte Winkel- und Streckenmessung erfüllt. Es fragt sich nun: Wie wird sich unsere Forderung gestalten für kontrollierte Festlegung, für einen Polygonzug mit Anschluss? Offenbar werden wir unser Prinzip für jeden Punkt des Zuges zur Geltung bringen müssen, denn nur unter diesen Umständen können wir beide Fehler in gleicher, einfacher Weise ausgleichen und erhalten auch nach der Ausgleichung gleiche Längs- und Querverschwenkung für jeden Punkt.

Die Polygonmessung liefert für die Einzelaufnahme den festen Rahmen und erfordert, weil sie demgemäss nur verhältnismässig kurze Seiten und also viele Winkelpunkte hat, umfangreiche Arbeiten. Wir können sie deshalb nur dann für die Praxis als günstig bezeichnen, wenn sie möglichst einfach gestaltet ist, sowohl für die Aufnahme, als auch besonders für die Ausgleichung. Diese Forderung schliesst von vornherein die Anwendung von Gewichten aus und zwar sowohl für die Aufnahme durch Wiederholung der Beobachtung als auch für die Ausgleichung durch Einführung von Gewichtszahlen. Unsere Beobachtungen müssen sich deshalb auf Gewichtseinheiten beschränken, und diese müssen als solche in der Rechnung bestehen bleiben. Als Gewichtseinheit für Winkel bezeichnen wir eine einfach kontrollierte, durch Beobachtung in beiden Lagen erhaltene Winkelgrösse und als Gewichtseinheit der Längenmessung das arithmetische Mittel einer Doppelmessung hin und her.

Die Forderung der Einfachheit der Ausgleichung bedingt die Trennung vom Winkel- und Streckenfehler und dokumentiert den gestreckten Zug als den günstigsten, denn bei dem gebrochenen Zug wirkt die Längsverschwenkung der einen Seite auf die Grösse der Querverschwen-

kung der folgenden und ebenso umgekehrt; die Querverschwenkung und Längsverschwenkung werden eine Funktion des Winkels und diese müsste für einen jeden Fall festgestellt werden.

Dies gilt allgemein. Unter Zugrundelegung unseres Prinzips für die einzelne Richtung kommt dasselbe bei einem derartig für die Ausgleichung günstigsten Zuge auch für den Anschlussfehler zur Geltung und somit für jeden Punkt, wenn die Winkel der einzelnen Richtung unabhängig von einander zu gegebenen Richtungen gemessen sind d. h. in der Rechnung als gleichgewichtig betrachtet werden können. Dies ist bekanntlich nur beim Bussolenzug der Fall, während der Theodolitzug, sich an bereits fehlerhafte Seiten anlehnend, die Fehler der Winkelmessung addiert und so für jede Richtung eine andere Genauigkeit, ein anderes Gewicht erhält.

Die von der Gestaltung des Polygonzuges allgemein geforderte Trennung von Längen- und Winkelfehler wird unter Zugrundelegung unseres Prinzips für jeden Punkt des Zuges nicht nur von dem gestreckten, sondern auch von dem rechtwinklig gebrochenen Zuge geleistet. Bei dem rechtwinkligen Brechungswinkel findet nur eine Auswechselung von Quer- und Längsverschwenkung statt, und, da beide gleich sind, so ist dadurch an der Fehlerfortpflanzung nichts geändert.

Dies ist von grosser Wichtigkeit für die praktische Geodäsie. Überall da, wo für eine kleine Messungsarbeit die Beobachtung von Dreiecksseiten ausgeschlossen bleibt, wird der Geodät gezwungen sein, ein geschlossenes Polygon zur Grundlage seiner Messung zu nehmen, und es wird ihm wohl immer möglich sein, den Rahmen seiner Aufnahme rechtwinklig zu gestalten.

Die Erfüllung der Forderung unseres Prinzips macht den Polygonzug zu einem homogenen Ganzen; sie lässt jede Richtung und jeden Punkt derselben zu gleichem Rechte kommen und erkennt neben der gestreckten auch die rechtwinklig gebrochene als die günstigste Form an. Ein solcher Zug ist aber offenbar ein idealer und muss selbst dann als günstigster bezeichnet werden, wenn hierdurch die absolute Genauigkeit der Punktlage gegenüber derjenigen bei dem jetzt gebräuchlichen Polygonzuge in einzelnen Fällen kleiner wird.

Ob die geforderte Genauigkeit mit der Bussole zu erzielen ist, kann erst nach Feststellung ihrer Grösse an anderer Stelle untersucht werden.

2. Dreiecksmessung.

Sind h_1 und h_2 Genauigkeitszahlen für die Fehler u und v, so sind die Wahrscheinlichkeiten für das Vorkommen der Fehler u und v nach dem der Methode der kleinsten Quadrate zu Grunde liegenden Gesetze gleich

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 u^2} \quad \text{und} \quad \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 v^2}$$

Betrachten wir nun u und v als Verschiebung zweier Strahlen bei Festlegung eines Punktes, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler u und v d. h. die Wahrscheinlichkeit des Schnittpunktes gleich

$$\frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2)} = W$$

Aus der Annahme, dass eine solche Beobachtungsart bei der Erzeugung der Fehler u und v vorgelegen hat,

welche mit grösster Wahrscheinlichkeit dieses Fehlersystem erzeugt, folgt

$$m_1 = \frac{1}{h_1 \sqrt{2}} \text{ und } m_2 = \frac{1}{h_2 \sqrt{2}}$$

Für einfache Festlegung eines Punktes ist

$$u = m_1 \text{ und } v = m_2$$

daraus folgt, dass

$$W = \frac{1}{2 \pi e m_1 m_2}$$

Nun wird W ein Maximum, wenn $m_1 m_2 =$ Min. d. h. da m_1 und m_2 mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv und negativ sein können, wenn

$$m_1 = m_2 = m$$

Nach Annahme, dass die Verschiebungen der Strahlen ihrem mittleren Fehler entspricht, was für einfache Festlegung als gegeben betrachtet werden kann, folgt für die Gleichheit der Verschiebung die grösste Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens.

Machen wir diese Annahme allgemein — und sie hat die grösste Wahrscheinlichkeit für sich — so erhalten wir dieses Maximum der Wahrscheinlichkeit auch für mehrfache Festlegung bei Gleichheit der Verschiebungen.

Die oben durch die Exponentialfunktion ausgedrückte Wahrscheinlichkeit für die Lage eines Punktes ist konstant, wenn der Exponent konstant ist, also

$$h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2 = s^2$$

Hieraus folgt wie Andrä und nach ihm Helmert nachgewiesen haben, dass Schnittpunkte gleicher Wahrscheinlichkeit auf ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen gruppiert sind mit den konjugierten Durchmessern

$$b^2 = 2 \left(\frac{m_1 s}{\sin \varphi} \right)^2 \text{ und } a^2 = 2 \left(\frac{m_2 s}{\sin \varphi} \right)^2$$

Für $m_1 = m_2$ werden diese Durchmesser für beliebiges φ gleich. Die Ellipse geht dann in einen Kreis über mit dem Halbmesser

$$r = \frac{m\,s}{\sin\varphi}\sqrt{2}$$

Dieser Halbmesser wird für beliebiges m ein Minimum für $\sin\varphi = \max$ also für $\varphi = 90^0$.

Wir haben also:

1. Für eine Beobachtung mit dem mittleren Fehler m_1 das Maximum der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler u, wenn $m_1 = u$.
2. Für die Wahrscheinlichkeit eines Schnittpunktes zweier Strahlen mit den Fehlern m_1 und m_2 resp. u und v das Maximum, wenn für dieselben $m_1 = m_2 = u = v$ ist.
3. Die Schnittpunkte für das Maximum der Wahrscheinlichkeit liegen auf Kreisen um den wahren Punkt, sind also nach allen Richtungen gleich verteilt.
4. Der Radius des Kreises wird ein Minimum für $m_1 = m_2$ resp. $u = v$, wenn die Strahlen sich unter einem rechten Winkel schneiden.

Daraus folgt offenbar, dass, wenn $m_1 = m_2$ und $\varphi = 90^0$ ist, in den meisten Fällen und wenn ausserdem $u = v$ ist, immer der Abstand des beobachteten Punktes von dem wahren ein Minimum wird d. h. die Aufnahme wird eine günstige, welche die Erfüllung der Forderung Querverschwenkung gleich Längstverschwenkung nach Möglichkeit garantiert.

Bei einem solchen Schnittpunkt ist für einfache Festlegung die Aufgabe der Methode der kleinsten Quadrate durch die Aufnahme gelöst, denn, wenn wir diese nach Henke als Prinzip des möglichst nahe Liegens auf-

fassen, so ist dieses Prinzip durch das Minimum des Radius des Fehlerkreises gelöst.

Betrachten wir diesen Radius, den wir hier mit M bezeichnen wollen, einmal rein geometrisch, indem wir ihn in die den beiden Strahlen parallelen Komponenten J_1 und J_2 zerlegen, so ist

$$M^2 = J_1^2 + J_2^2 \pm 2 J_1 J_2 \cos \varphi$$

Die rechtwinkeligen J_1 und J_2 entsprechenden Komponenten seien m_1 und m_2, sodass

$$J_1 = \frac{m_1}{\sin \varphi} \text{ und } J_2 = \frac{m_2}{\sin \varphi}$$

dann ist

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2 \varphi} + 2 \frac{m_1 m_2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

Wollen wir hier den zweiten Faktor für einen einzelnen Fall eliminieren d. h. soll die Gleichung für jeden Fall einen bestimmten Wert für M geben, so müssen wir $\varphi = 90^0$ setzen; damit wird

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2 \varphi}$$

Hätten wir m_1 und m_2 als mittleren Fehler, aus einer Anzahl von Beobachtungen abgeleitet, angesehen, so wäre $m_1 m_2 = 0$ geworden und damit der zweite Faktor weggefallen. Bei Aufstellung eines Prinzips darf dies jedoch nicht geschehen, sofern es für eine Einzelbeobachtung Gültigkeit haben soll.

Mit $\varphi = 90^0$ erhalten wir aber zugleich ein Minimum von M, wenn $m_1^2 + m_2^2 = \min$ d. h. $m_1 = m_2 = m$ wird.

Hiermit ist aber die Forderung unseres Prinzips erfüllt und es ist, wie oben

$$M = m \sqrt{2}$$

Jordan findet aus der allgemeinen Gleichung für M in seinem Handbuch der Vermessungskunde Bd. 1. das Minimum von M für $\varphi = 109^{0}\ 28'$ und sagt darüber: „Bei näherer Betrachtung findet man, dass dieses ganz dem praktischen Gefühl entspricht, denn so lange der Winkel noch nahe an 90^{0} ist, überwiegt bei einer Vergrösserung desselben die Verkürzung der Strahlen A P und B P die in der Verschlimmerung des Schnittwinkels liegende Ungunst".

Wir können diesem Wert von φ als dem günstigsten nicht beistimmen. Die Annahme $m_1\ m_2 = o$ scheint uns bei Bestimmung einer günstigen Form nicht zutreffend für den einzelnen Fall zu sein, ganz abgesehen von der Erfüllung unseres Prinzipes als solches. Ausserdem hat aber die Dreiecksbestimmung die Aufgabe, ein möglichst grosses Gebiet mit möglichst grosser Genauigkeit zu fassen und unsere Festlegung erhält somit noch indirekt die Bedingung eines Maximums der Entfernung des gesuchten Punktes von dem gegebenen, eine Bedingung, welche mit $\varphi = 90^{0}$ jedenfalls besser erfüllt ist als mit dem Jordan'schen Wert.

Liegen zur Festlegung eines Punktes überschüssige Beobachtungen vor, so erhält man zur Bestimmung der Koordinaten eines Punktes mehr als zwei Fehlergleichungen, nämlich die folgenden:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\ x + b_1\ y + l_1 \\ v_2 &= a_2\ x + b_2\ y + l_2 \\ v_3 &= a_3\ x + b_3\ y + l_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

wobei x und y die Korrektionen sind, welche an irgend welchen Näherungswerten der Koordinaten noch anzu-

bringen sind. Man bestimmt x und y aus den zwei Normalgleichungen

$$[aa]\ x + [ab]\ y + [al] = o$$
$$[ab]\ x + [bb]\ y + [bl] = o$$

welche man einfacher so schreiben kann

$$[av] = o \qquad [bv] = o$$

Hierin bezeichnen a und b die Richtungs-Koefficienten

$$a_m = -\frac{\sin \varphi_m}{s_m} \cdot \rho \qquad b_m = +\frac{\cos \varphi_m}{s_m} \cdot \rho$$

Unser Prinzip fordert, dass die Beobachtungen so ausgeführt werden, dass $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v$. Dies setzt für gleiche mittlere Fehler der Richtung gleiche Streckenlänge für die Entfernung des gesuchten Punktes von dem gegebenen voraus, also

$$s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s$$

Nun ist $$[a] = -\frac{[\sin \varphi]}{s}\rho, \quad [b] = +\frac{[\cos \varphi]}{s} \cdot \rho$$

Bezeichnen wir die gegebenen Punkte mit 1, 2, 3, . . . m, ihre Entfernungen mit s_a, s_b, s_c . . . s_m, so ist für jedes der Dreiecke P12, P23 . . . . sowie für das geschlossene Vieleck 1, 2, 3 . . . m, 1 die Summe der Koordinatenunterschiede gleich Null

$$s_a \sin \varphi_a + s_1 \sin \varphi_1 + s_2 \sin \varphi_2 = o$$
$$s_b \sin \varphi_b + s_2 \sin \varphi_2 + s_3 \sin \varphi_3 = o$$
$$s_c \sin \varphi_c + s_3 \sin \varphi_3 + s_4 \sin \varphi_4 = o$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Durch Addition erhält man

$$s_a \sin \varphi_a + s_b \sin \varphi_b + s_c \sin \varphi_c + \ldots + 2\, s_1 \sin \varphi_1 + 2\, s_2 \sin \varphi_2 + 2\, s_3 \sin \varphi_3 + \ldots = o$$

und, da der erste Teil der Summe gleich Null ist

$$s_1 \sin \varphi_1 + s_2 \sin \varphi_2 + s_3 \sin \varphi_3 + \ldots = 0$$

es ist aber $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s$

also $$[\sin \varphi] = 0$$

In derselben Weise erhält man

$$[\cos \varphi] = 0$$

Hiernach haben wir

$$[a] = 0 \text{ und } [b] = 0$$

also auch $$[a] \cdot v = 0 \text{ und } [b] \cdot v = 0$$

und für gleiche v $$[av] = 0 \text{ und } [bv] = 0$$

Die ist aber die einfache Form für die Normalgleichungen.

Beobachten wir also einen Punkt, so dass $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s$ und $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v$ ist, so erhalten wir durch die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate den wahren Punkt.

Diese Folgerung kann jedoch aus obigen Bedingungen für die Aufnahme allein, die ja im Grunde genommen gleichbedeutend sind, nicht geschlossen werden. Wir haben für die Vorzeichen der v noch keine Bedingung gestellt. Dies thut die Methode durch die Forderung

$$[v] = 0$$

Nehmen wir die geometrische Anschauung in der fehlerzeigenden Figur zur Hülfe, so wird die Gleichung $[v] = 0$ für jede Lage der Null-Richtung erfüllt werden müssen, da die Methode keine Bedingung für die Lage der Koordinaten-Axen enthält. Dies kann aber nur dann sein, wenn die fehlerzeigende Figur symmetrisch zum wahren Punkte wird d. h. wenn die gegebenen Punkte symmetrisch zu dem gesuchten liegen. Nur unter Hinzunahme dieser Bedingung kann also die obige Folgerung gelten.

Untersuchen wir nun die Forderungen der Gleichung

$$[aa] = \max$$

und $[aa] - [bb] = 0$

es ist $[aa] = s^2 \sin {}^2\varphi_1 + s^2 \sin {}^2\varphi_2 + s^2 \sin {}^2\varphi_3 + \ldots$

also $[aa] = \max$, wenn $[\sin {}^2\varphi] = \max$, wenn

$$2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + 2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 + \ldots = 0$$

oder $\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 + \ldots = [\sin 2\varphi] = 0$

und $[aa] - [bb] = 0$ wenn

$$s^2 \sin {}^2\varphi_1 - s^2 \cos {}^2\varphi_1 + s^2 \sin {}^2\varphi_2 - s^2 \cos {}^2\varphi_2 + \ldots = 0$$

also $\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2 + \ldots = [\cos 2\varphi] = 0$

Betrachten wir nun die oben gefundenen Bedingungen

$$[\sin \varphi] = 0 \text{ und } [\cos \varphi] = 0$$

für symmetrische Lage der gegebenen Punkte also für

$\varphi_1 = \varphi_1$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \alpha$, $\varphi_3 = \varphi_1 + 2\alpha$, $\varphi_4 = \varphi_1 + 3\alpha \ldots$

so ist

$$\sin \varphi_1 + \sin (\varphi_1 + \alpha) + \sin (\varphi_1 + 2\alpha) + \ldots = 0$$
$$\cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 + \alpha) + \cos (\varphi_1 + 2\alpha) + \ldots = 0$$

Da diese Gleichungen unabhängig von der Lage des Koordinatensystems sind, müssen sie auch gelten, wenn $\varphi_1 = 0$ ist; also

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots = 0$$
$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots = 0$$

Die Grösse von α ist hier willkürlich. Die Gleichungen gelten deshalb auch für den doppelten Betrag von α d. h. es ist auch

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \ldots = 0$$
$$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \ldots = 0$$

Die aus der Bedingung $[\sin \varphi] = 0$ und $[\cos \varphi] = 0$ abgeleiteten Gleichungen für den einfachen Winkel α stellen die Bedingung für die geschlossene Form eines Polygon von n Seiten dar, während die daraus gefolgerten Gleichungen für den doppelten Winkel dieselbe Bedingung für ein Polygon mit $\frac{n}{2}$ Seiten enthält, wie es bei symmetrischer Form der Fall ist.

Aus diesen Gleichungen können wir nun umgekehrt schliessen, dass auch

$$[\sin 2\varphi] = 0 \text{ und } [\cos 2\varphi] = 0$$

Aus der symmetrischen Lage der gegebenen Punkte zu dem gesuchten folgt also, dass

$$[\sin 2\varphi] = 0 \text{ oder } [aa] = \max$$

und

$$[\cos 2\varphi] = 0 \text{ oder } [aa] - [ab] = 0$$

Für die beiden konjugierten Durchmesser der Fehler-Ellipse gelten nach Helmert für mehrfache Festlegung eines Punktes die Gleichungen:

$$A^2 = \frac{[aa] + [bb] + G}{[aa][bb] - [ab][ab]} \frac{\delta^2}{2}$$

$$\text{und } B^2 = \frac{[aa] + [bb] - G}{[aa][bb] - [ab][ab]} \frac{\delta^2}{2}$$

worin

$$G = \frac{-([aa] - [bb])}{\cos 2\psi}$$

und ψ das Azimut der grossen Axe A ist.

Nun wird für beliebiges ψ $G = 0$, wenn $[aa] - [bb] = 0$ und damit

$$A^2 = B^2 = r^2 = \frac{[aa] + [bb]}{[aa][bb] - [ab][ab]} \frac{\delta^2}{2} = \frac{[aa]}{[aa][aa] - [ab][ab]} \cdot \delta^2$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\delta^2} \left([aa] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} \right)$$

Nun wird

$$r = \min, \text{ wenn } \frac{1}{r^2} = \max, \text{ wenn } [aa] = \max \text{ ist.}$$

Bei symmetrischer Lage der gegebenen Punkte zu dem gesuchten geht also in der That die Fehler-Ellipse in einen Kreis über mit möglichst kleinem Radius.

Die für einfache Festlegung erhaltene Formel

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2 \varphi}$$

weist unter Zugrundelegung unseres Prinzips für Vorwärts-Einschneiden das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck direkt als das günstigste nach. Unsere Formel gilt aber allgemein und liefert mit der Bedingung $m_1 = m_2$ und $\varphi = 90^0$ für jede Art der der Aufnahme eines Punktes mit reiner Winkel-Beobachtung günstigste Figuren.

Wir müssen deshalb alle Aufgaben der Festlegung eines Punktes auf diese Formel zurückführen und zu diesem Zwecke die Verschwenkung m_1 und m_2 und den Winkel φ allgemein feststellen.

Neben dem Vorwärts-Einschneiden haben wir so das Seitwärts- und Rückwärts-Einschneiden zu betrachten. Bei beiden tritt als geometrischer Ort für den gesuchten Punkt der Kreis mit einem beobachteten Peripherie-Winkel auf, und es muss demnach unsere Aufgabe sein, die einem Fehler dieses Peripherie-Winkels entsprechende Verschwenkung festzustellen; wir müssen entsprechend den Fehlergleichungen der Methode der kleinsten Quadrate, den Fehler linear machen. Dies geschieht dadurch, dass wir den Kreis als geometrischen Ort durch seine Tangente für den gesuchten Punkt ersetzen und deren Verschiebung berechnen.

Bezeichnen wir den rechtwinkligen Abstand der Tangente von der Mitte der Basis mit p, die dem Fehler

des Winkels φ $d\varphi$ entsprechende Verschiebung mit dp und den Abstand des gesuchten Punktes von der Basis mit y, so ist bekanntlich

$$dp = - \frac{y}{\sin \varphi} d\varphi$$

oder nach einfacher Umformung

$$dp = - \frac{ab}{c} d\varphi$$

worin c die Basis a und b die beiden anderen Seiten bezeichnen.

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass bei wachsendem Winkel φ die Tangente gegen die Basis hineinrückt, also p abnimmt.

Für Seitwärts-Einschneiden erhalten wir $\varphi = \beta$, gleich dem Winkel, den die Tangente mit dem direkt gemessenen Strahl bildet, und unser Prinzip fordert

$$\beta = 90^0$$

und

$$b \,.\, \delta = \frac{ab}{c} \delta$$

also

$$a = c$$

Das Dreieck muss also ein rechtwinklig gleichschenkliges sein mit dem rechten Winkel an der Basis, der beobachteten Richtung gegenüber.

Beim Rückwärts-Einschneiden (Pothenotische Bestimmung mit zwei Winkeln) ist der geometrische Ort der Festlegung des Punktes der Schnittpunkt der beiden Kreise mit den beobachteten Peripherie-Winkeln über den beiden gegebenen Seiten, und der Winkel φ ist der Schnittwinkel der beiden Tangenten in dem gesuchten Punkt.

Dieser Winkel erscheint als Summe der beiden Winkel α und β, den die beiden Strahlen nach A und B mit den gegebenen Seiten a und b bilden (rechtsläufig

gezählt in dem bekannten Sinne der pothenotischen Aufgabe). Bezeichnen wir die Länge der beobachteten Strahlen mit d_1, d_2 und d_3, so haben wir als Forderung unseres Prinzips

$$\alpha + \beta = 90^0$$

und

$$\frac{d_1\ d_2}{a}\ \delta = \frac{d_2\ d_3}{b}\ \delta$$

oder

$$\frac{d_1}{a} = \frac{d_3}{b}$$

Stellen wir nun die Resultate unserer Betrachtung der drei Arten der einfachen Festlegung eines Punktes zusammen, so erhalten wir

	Bedingung für die günstigste Form
1.) Vorwärts-Einschneiden	
gegeben: A B = c	$\gamma = 90^0$
beobachtet: α und β	a = b
2.) Seitwärts-Einschneiden	
gegeben: A B = c	$\beta = 90^0$
beobachtet: α und γ	c = b
3.) Rückwärts-Einschneiden	
gegeben: A C = (a) und BC = (b)	$\alpha + \beta = 90^0$
beobachtet: μ und ν	$\frac{(d_1)}{(a)} = \frac{(d_3)}{(b)}$

Liegen beim Rückwärts-Einschneiden die gegebenen Punkte A, B und C auf einer Geraden, so erhalten wir dieselbe günstigte Form wie für Vorwärts-Einschneiden, wie es sein muss, da der Kreis um AB gemeinschaftliche Genauigkeitskurve für beide Arten der Aufnahme ist.

Für mehrfache Festlegung haben wir die günstigste Form bereits eindeutig festgelegt.

Eine Betrachtung auf Grund der Gleichheit der Verschwenkungen führt also auf die Bedingung der Gleichheit der Entfernungen der gegebenen Punkte von dem gesuchten, welche wir oben schon vorweggenommen hatten, denn nur in diesem Falle sind die Verschiebungen für jeden geometrischen Ort gleich. In dem einfachsten Falle der Beobachtung aller drei Winkel eines Dreiecks erhalten wir so als günstigste Figur das gleichseitige Dreieck, womit auch der Bedingung der Symmetrie genügt ist.

3. Polygonmessung.

Bezeichnen wir den mittleren Fehler der Streckeneinheit mit ε_1, den mittleren Fehler der Richtung mit α, so ist die Bedingung für die Erfüllung unseres Prinzips unter der Annahme, dass die Streckenmessung nur unregelmässige Fehler enthält, gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\alpha \cdot s}{\rho} = \varepsilon_1 \sqrt{s} \text{ oder } \varepsilon_1 = \frac{\alpha \sqrt{s}}{\rho}$$

Setzen wir hierin $s = 1$, d. h. $\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{\rho}$, so haben wir damit eine Bedingung, welche unabhängig ist von dem Gesetze der Fehlerfortpflanzung für Streckenmessung und demnach sowohl für regelmässige als für unregelmässige Fehler gilt. Hieraus können wir dann unsere Forderung für beliebiges s berechnen unter der Voraussetzung, dass bei der Messung nur unregelmässige Fehler mitwirken.

Wir wollen, um einen Überblick über dies Genauigkeitsverhältnis zu erhalten, die Werte ε_1 und ε_{100} (für

s = 100) für verschiedene Richtungsfehler a zusammenstellen:

a = 10″	ε_1 = 0,00005	ε_{100} = 0,0005
= 20″	= 0,0001	= 0,001
= 30″	= 0,00015	= 0,0015
= 50″	= 0,00024	= 0,0024
= 2′	= 0,0006	= 0,006
3′	= 0,001	= 0,01
= 20′	= 0,006	= 0,06

Ein Vergleich der Resultate ergiebt, dass dem üblichen Winkelfehler von 20″ ein mittlerer Fehler der Strecke s = 100 von 1 mm entspricht, während der von der Anweisung geforderte mittlere Fehler dieser Strecke von 6 cm einen mittleren Winkelfehler von 20′ ergiebt. Die Winkelmessung wird also unter diesen Annahmen unverhältnismässig viel genauer ausgeführt als die Linienmessung.

Wir waren bis jetzt von der Voraussetzung ausgegangen, der Streckenfehler wachse proportional der Quadratwurzel der Strecke und der Richtungsfehler, den wir vorläufig noch dem Winkelfehler gleich setzen dürfen, proportional der Strecke selbst. Diese Annahmen stimmen aber, wie wir gesehen haben, mit der Wirklichkeit nicht genau überein.

Wir fanden als mittleren Fehler der Richtungsmessung

$$m_r = \sqrt{r^2 + 2{,}5\, \rho^2 \frac{e^2}{s^2}}$$

und als mittleren Fehler der Streckenmessung

$$m_s = k\, s + \sqrt{a^2\, s + l^2\, s^2}$$

Die dem Richtungsfehler u_ν entsprechende Querverschwenkung q ist gleich $\frac{u_\nu \, s}{\rho}$; unser Prinzip lautet also

$$k s + \sqrt{a^2 s + l^2 s^2} = \frac{s}{\rho} \sqrt{\nu^2 + 2{,}5 \, \rho^2 \frac{e^2}{s^2}}$$

oder $$k s + \sqrt{a^2 s + l^2 s^2} = \sqrt{\frac{\nu^2 s^2}{\rho^2} + 2{,}5 \, e^2}$$

mit $$\frac{\nu^2}{\rho^2} = \delta^2$$

$$k s + \sqrt{a^2 s + l^2 s^2} = \sqrt{\delta^2 s^2 + 2{,}5 \, e^2}$$

Setzen wir hierin $k = o$ d. h. nehmen wir an, der ganze Streckenfehler komme in der Beobachtungsdifferenz zum Ausdruck, was zwar nicht genau der Fall ist, wohl aber für die verhältnismässig kurzen Seiten, wie sie bei Polygonmessung vorliegen, bei rationeller Anordnung der Messung näherungsweise angenommen werden kann, so erhalten wir

$$a^2 s + l^2 s^2 = \delta^2 s^2 + 2{,}5 \, e^2$$

Nach der Anweisung ist der mittlere Fehler einer einmaligen Messung

$$m = 0{,}00236 \sqrt{6 \, s} + 0{,}0075 \, s^2$$

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels einer Doppelmessung wird demnach

$$m_s = \frac{m}{\sqrt{2}} = 0{,}00167 \sqrt{6 \, s} + 0{,}0075 \, s^2$$

Daraus erhalten wir $a^2 = 0{,}00\,00\,167$

und $l^2 = 0{,}0000\,000\,209$

Setzt man, wie es für die Praxis wohl zutreffend sein möge $2{,}5 \, e^2 = 0{,}0000\,625$, so kann man die Grösse

von δ resp. ν nach den Bedingungen für die Erfüllung unseres Prinzips berechnen.

Wir wollen im Folgenden die Werte von m_s, δ und ν für verschiedene Werte s zusammenstellen

s	m_s^2	m_s	$\delta^2 s^2$	δs	δ	ν	u_ν
10	0,00016909	0,0130	0,00010659	0,0103	0,00103	3′32″	4′28″
20	0,00034236	0,0185	0,00027986	0,0167	0,000835	2′52″	3′11″
30	0,00051981	0,0230	0,00045731	0,0213	0,00071	2′26″	2′38″
50	0,00088725	0,0298	0,00082475	0,0287	0,000574	1′58″	2′04″
100	0,001879	0,0433	0,0018065	0,0425	0,000425	1′28″	1′40″
200	0,004176	0,0646	0,0041035	0,0641	0,0003205	1′06″	1′07″
300	0,006891	0,0830	0,0068285	0,0826	0,0002753	57″	57″

Die Grösse des Gesamtrichtungsfehlers sowohl als des reinen Richtungsfehlers nimmt alao bei zunehmendem s ab und zwar erstere stärker als letztere. Tragen wir die Grössen s als Abscissen, die Grössen ν als Ordinaten auf, so erhalten wir eine Kurve, die sich der Abscissenaxe asymptotisch nähert. Die Zunahme oder Abnahme von ν wird demnach bei zu- und abnehmendem s umso kleiner je grösser s ist, und es folgt daraus, dass wir den reinen Winkelfehler von der Streckenlänge dadurch möglichst unabhängig machen, dass wir diese möglichst gross nehmen. Beobachten wir dann nur annährend gleiche Seiten, so wäre es uns möglich, unserem Prinzip unter Verwendung eines nach dem berechneten ν gegebenen Instrumentes allgemein zu genügen.

Wir fordern also von der Art unserer Aufnahme, dass nur möglichst gleiche, möglichst lange Seiten zur Verwendung kommen. Nun hat aber die Länge der Polygonseiten ihre Grenzen, teils durch die Beschaffenheit des Terrains, teils durch die Rücksicht auf günstige Fest-

legung der Grenzpunkte gegeben, und es fragt sich, ob diese Längen unseren Anforderungen genügen können.

Wir werden im Durchschnitt bei Polxgonseiten nicht weit über 100 m hinausgehen dürfen; setzen wir diese Länge als Grenze fest, so erhalten wir als Differenz ihres mittleren reinen Winkelfehlers bei einer Grösse von 1'38" gegen diejenige der halben Länge 30". Die Forderung gleicher Längen der Seiten braucht demnach nicht streng erfüllt zu werden, denn bei kleinen Unterschieden beträgt die Differenz der reinen Winkelfehler nur einige Sekunden, und diese kann bei einem mittleren Fehler von 1'28" keine Rolle spielen. Allerdings dürfen die Längeunterschiede, wenn ihre Einwirkung auf den Winkelfehler unmerklich sein soll, nicht allzu gross werden, aber es dürfte wohl nicht allzu schwer sein, sich hier in gewissen Grenzen zu halten, und wir hätten es so ermöglicht, unser Prinzip allgemein zur Geltung zu bringen.

Der mittlere reine Richtungsfehler 1'28" und der mittlere Gesamtrichtungsfehler 1'40" ist verhältnismässig gross, viel grösser als er bei Anwendung des Theodolites erhalten wird, und die Beantwortung der Frage nach der Verbesserung der Bussole bis zur Erfüllung unseres Prinzips kann demnach schon jetzt jedenfalls nicht als unmöglich bezeichnet werden.

Der mittlere Richtungsfehler wird für kleines s grösser. Wir brauchen deshalb an unser Instrument die geringsten Ansprüche zu stellen, wenn wir die Streckenlänge sehr klein nehmen. Allerdings muss es dann unser Streben sein, nur gleich lange Seiten zu erhalten, denn eine kleine Differenz macht sich hier schon stark fühlbar. Diese Forderung erfüllen wir streng bei Anwendung eines Bussolenzuges, in welchem alle Seiten die Länge eines Messbandes haben, und dies erklärt uns die verhältnismässig

günstigen Resultate, die mit derartigen Zügen gewonnen werden.

Wenn wir so unser Prinzip durch Aufstellung der Forderung gleiche Seiten oder der Forderung von möglichst gleichen und möglichst langen Seiten zur Geltung bringen, so haben wir damit immerhin unseren Messungen in gewissem Sinne eine Beschränkung auferlegen müssen. Es fragt sich, können wir diese Beschränkung nicht aufheben, können wir die Forderung unseres Prinzips nicht allgemein für jeden Punkt der Ebene erfüllen, unabhängig von der Entfernung des gegebenen Punktes von dem gesuchten, nachdem die Forderung für einen beliebigen Punkt der Richtung erfüllt ist.

Die Bedingung hierfür lautet

$$a^2 s + l^2 s^2 = \delta^2 s^2 + 2{,}5\ e^2$$

Diese Gleichung kann nur dann für jedes s Geltung erhalten, wenn sie entsprechend abgeändert sind. Eine Abänderung der Gleichung bedingt aber eine Abänderung des Gesetzes der Fehlerfortpflanzung, sei es bei der Richtungsmessung, sei es bei der Streckenmessung, wenn wir nicht bei dem Richtungsfehler einen Faktor hätten, der unabhängig von s ist. Ändern wir diesen Faktor ab, indem wir ihn proportional s setzen, so haben wir dadurch an der Fehlerfortpflanzung an sich nichts geändert, wenn wir von der Art der Messung fordern, dass sie so eingerichtet ist, dass der Excentricitätsfehler der Gleichung genügt

$$2{,}5\ e^2 = c^2 s$$

Damit erhalten wir die in Bezug auf s symmetrische Gleichung

$$a^2 s + l^2 s^2 = \delta^2 s^2 + c^2 s$$

Diese gilt für beliebiges s, wenn

$$c = a \text{ und } \delta = l$$

Damit ist der reine Winkelfehler unabhängig von s geworden; ein nach der Bedingung $\delta = 1$ gegebenes Instrument erfüllt also unser Prinzip für jedes s, während der Excentricitätsfehler abhängig von s geworden ist nach der Gleichung

$$2{,}5\ e^2 = c^2\ s$$

Nach der Anweisung erhalten wir für $\delta = e$

$$\nu = 30''$$

und

e =	0,0082	0,012	0,014	0,018	0,026	0,037	0,045
für s =	10	20	30	50	100	200	300

Derart grosse Fehler der Excentricität kommen jedoch praktisch nicht vor, und es wäre nicht rationell unsere Messungen in ein solches Gesetz zwingen zu wollen, ganz abgesehen von der Möglichkeit der Erfüllung einer solchen Forderung, denn die Forderung der Zunahme des Fehlers der Excentricität geschieht ja auf Kosten der Grösse des reinen Richtungsfehlers, auf Kosten der Genauigkeit unseres Instrumentes.

Wollen wir also unser Prinzip zur Geltung bringen, so müssen wir dies für eine gewisse, der Praxis entsprechende Länge thun und dann von unseren Beobachtungen fordern, dass sie nur diese Längen enthält, und zwar gilt diese Forderung umso strenger, je kürzer die Seiten des Polygonzuges sind.

Wir sind zu diesem Resultate gelangt, indem wir in der Gleichung für die Fehlerfortpflanzung der Streckenmessung $k = o$ gesetzt haben, obgleich diese Voraussetzung selbst für die kurzen Seiten eines Polygons nicht streng erfüllt wird. Legen wir dem Faktor k irgend einen Wert bei, so wird sich die Fehlerfortpflanzung für Streckenmessung der für Richtungsmessung noch besser anpassen; wir werden schon für kürzere Strecken und

grössere Längenunterschiede die Erfüllung unserer Forderung und damit für unser Prinzip noch günstigere Resultate erhalten.

Die Betrachtung wurde für die Richtungsmessung allein durchgeführt, da nur diese, wie wir sehen werden, unsere weitere Bedingungen erfüllen kann. Die Winkelmessung wird schon deshalb ungünstiger, weil sie grössere Anforderungen an die Genauigkeit des Instrumentes stellt, da ja ein grösserer Teil der Genauigkeit des Gesamtwinkels von dem Fehler der Excentrizität aufgebraucht wird.

Wir haben nun die Bedingungen festgestellt, unter welchen unsere Forderung für jeden Punkt einer einzelnen Richtung erfüllt wird; es muss jetzt unsere Aufgabe sein, festzustellen, unter welcher Bedingung unser Prinzip für jeden Punkt des ganzen Zuges zur Geltung kommt. Die Frage nach dieser Bedingung ist naturgemäss eine Frage nach der Gleichung der Fehlerfortpflanzung in einem solchen Zuge. Die Grösse der Querverschwenkung eines beliebigen Punktes des Zuges hängt ab von dem mittleren Fehler der Richtung des Azimutes und von der Anzahl der Zwischenpunkte, die zur Festlegung desselben nötig waren d. h. von dem Verhältnis der Gesamtlänge L zur Richtungslänge s oder von der Grösse dieser Strecken selbst. Bezeichnen wir den Fehler der Streckeneinheit mit ε, so ist die Forderung unseres Prinzipes $\varepsilon = m$, wo m die dem Azimutfehler entsprechende Querverschwenkung für $s = 1$ oder den Azimutfehler selbst bezeichnet. Die Längsverschwenkung einer Strecke L beträgt unter diesen Voraussetzungen $\varepsilon \sqrt{L}$. Die Querverschwenkung muss demnach $m \sqrt{L}$ mal einer Funktion von s sein, welche für $s = 1$ auch gleich 1 wird. Eine solche Funktion ist aber $\sqrt{s}$, und wir können deshalb jedenfalls sagen, dass

wenn diese Funktion die sekundäre Querverschwenkung darstellt, sie unser Prinzip erfüllt, vorausgesetzt, dass es bereits primär, für eine Richtung erfüllt ist. Nehmen wir zuerst an, die Richtungen seien unabhängig gemessen d. h. der Zug sei mit der Bussole beobachtet.

Die dem mittleren Fehler m des Azimutes entsprechende Querverschwenkung der Strecke s ist dann $w = ms$ und die Querverschwenkung eines beliebigen, durch n Zwischenpunkte festgelegten Punktes,

$$q = \sqrt{n\, w^2}$$

nun ist $$n = \frac{L}{s}$$

also $$q = \sqrt{\frac{L}{s} w^2} = m \sqrt{L \cdot s}$$

Der Bussolenzug erfüllt also unser Prinzip für jeden Punkt.

Die Gleichung $q = m \sqrt{L \cdot s}$ zeigt, dass die Querverschwenkung umso kleiner wird, je kleiner s ist. Dies hat aber auf die Erfüllung unserer Forderung keinen Einfluss, denn mit wachsendem s nimmt ja auch m ab, und es wird, wenn $ms = w$ ist, in jedem Falle

$$q = w \cdot \sqrt{n} = m_L = m_s \cdot \sqrt{n}$$

Wir werden also hierdurch frei von der Forderung möglichst kurzer Seiten beim Bussolenzug, eine Forderung, die wir nur auf Kosten der Schnelligkeit der Beobachtung erfüllen könnten.

Anders verhält es sich mit dem durch den Theodolit aufgenommenen Polygonzug. Hier sind die Richtungen nicht unabhängig gemessen; sie werden durch Übertrag aus den Winkeln erhalten. Bezeichnen wir den mittleren Fehler eines Winkels mit m_w, so erzeugt derselbe

im ersten Punkte eine Querverschwenkung $= \pm n \cdot s \cdot m_w$
im zweiten „ „ „ $= \pm (n-1)\, s\, m_w$
im dritten „ „ „ $= \pm (n-2)\, s\, m_w$

. . . . . .

. . . . . .

im $(n-1)^{ten}$ „ „ „ $= \pm 2\, s.\, m_w$
im n^{ten} „ „ „ $= \pm s.\, m_w$

Diese Fehler können nun als unabhängig beobachtet gelten und geben somit eine Gesamtquerverschwenkung

$$p = \sqrt{(n \cdot s \cdot m_w)^2 + ([n-1]\, s \cdot m_w)^2 + \ldots + (2m \cdot {}_w)^1 + (s \cdot m_w)^2}$$

$$= m_w\, s \sqrt{n^2 + (n-1)^2 + \ldots 2^2 + 1^2}$$

$$= m_w\, s \sqrt{\int_0^{\pi} n^2\, dn} = m_w\, s \sqrt{\frac{n^3}{3}}$$

nun ist $n = \frac{L}{s}$

folglich wird $q = \frac{m_w}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L^3}{s}} = 0{,}577\ m_w \sqrt{\frac{L^3}{s}}$

Hieraus folgt schon nach dem oben Gesagten, dass der Theodolitzug unser Prinzip nicht allgemein erfüllen kann, wenigstens nicht ohne Einführung von Gewichten.

Bezeichnen wir den mittleren Fehler der Länge L mit m_L, so lautet unsere Bedingung

$$m_L = \frac{m_w}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L^3}{s}}$$

$$\frac{m_L}{L} = m_w \sqrt{\frac{L}{3\, s}}$$

Diese Gleichung ergiebt nur dann die Erfüllung unserer Forderung, wenn entweder $\sqrt{\frac{L}{3s}} = 1$ d. h. $L = 3s$ ist, oder wenn die Winkel so beobachtet sind, dass

$$m_w \cdot \sqrt{\frac{L}{3s}} = \mu,$$

wo μ der mittlere Fehler des beobachteten Winkels bezeichnet.

Daraus folgt, dass

$$m_w = \sqrt{\frac{\mu}{\frac{L}{3s}}} \text{ sein muss.}$$

Wollen wir also unsere Forderung für irgend einen Punkt des Zuges erfüllen, so müssen wir die Winkelmessung für jeden Punkt wiederholen, und zwar beträgt die Anzahl der Wiederholungen

$$\frac{L}{3s} = \frac{n}{3}.$$

Für $n = 3$ oder $L = 3s$ wird also unsere Forderung bei einfacher Beobachtung erfüllt, während für $n < 3$ oder $n > 3$ die Querverschwenkung kleiner oder grösser als die Längsverschwenkung wird.

Wir können also auf diese Weise durch Wiederholung der Beobachtung für einen gewissen Punkt und durch Einführung von Gewichten sogar für jeden Punkt zu dem gewünschten Resultate kommen. Damit geht uns aber der grosse Vorteil, die Anschlussfehler einfach proportional den Streckenlängen resp. den Koordinatenunterschieden zu verteilen, verloren; wenn dies trotzdem geschieht, kann die Verteilung jedenfalls nicht als rationell bezeichnet werden.

Die Koordinaten mit dem Richtungswinkel φ und der Streckenlänge s erhält man nach den Gleichungen

$$y = s. \sin \varphi \qquad x = s. \cos \varphi$$

Differentiert man diese Gleichungen nach s und φ und bezeichnet mit m_y und m_x die dadurch bedingte Änderung von y und x, so erhält man:

$$m_y = \sin \varphi \, ds + s \cos \varphi \, d\varphi$$
$$m_x = \cos \varphi \, ds - s \sin \varphi \, d\varphi$$

Bezeichnen wir nun die Längsverschwenkung mit w', die Querverschwenkung mit w'', so ist

$$ds = w' \qquad d\varphi = \frac{w''}{s}$$

Daraus folgt

$$m_y = w' \sin \varphi + w'' \cos \varphi$$
$$m_x = w' \cos \varphi - w'' \sin \varphi$$

folglich

$$w' = m_y \sin \varphi + m_x \cos \varphi$$
$$w'' = m_y \cos \varphi - m_x \sin \varphi$$

Als Bedingung für die Erfüllung unserer Forderung haben wir

$$w' = w''$$

also $m_y \sin \varphi + m_x \cos \varphi = m_y \cos \varphi - m_x \sin \varphi$

oder $$\frac{m_y}{m_x} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{y + x}{y - x} = \operatorname{tg} (45^0 + \varphi)$$

Da der Wert von $\operatorname{tg} (45^0 + \varphi)$ für einen gestreckten oder rechtwinklig gebrochenen Zug derselbe bleibt, so können wir aus der Erfüllung dieser Bedingungsgleichung auf die Erfüllung unserer Forderung auch für u Strecken s schliessen.

Unser Prinzip dokumentiert also den gleichzeitig gestreckten oder rechtwinkelig gebrochenen Bussolenzug als den günstigsten und giebt uns damit folgende Vorteile an die Hand:

1. Möglichst geringe Anforderung an die Genauigkeit des Instrumentes;
2. Gleichmässige, symmetrische Verteilung der Fehler auf den ganzen Zug und somit einfache proportionale Verteilung derselben.

Die Bussole, wie wir sie kennen, ist nur einer geringen Genauigkeit fähig, so gering, dass sie trotz ihrer günstigen Fehlerfortpflanzung bis jetzt als Beobachtungsinstrument nur für sehr geringwertige Messungen Verwendung finden konnte und infolge der allgemeinen Brauchbarkeit des Theodolites fast historisch geworden ist. Diese Genauigkeit genügt auch nicht zur Erfüllung unseres Prinzipes, und letztere hängt daher von einer Verbesserung der Bussole in ihrem Sinne ab.

Die Ungenauigkeit der Bussole ist hauptsächlich bedingt durch die Schwankungen der Nadel. Diese glauben wir auf folgende Weise beseitigen zu können:

1. Durch Vergrösserung des magnetischen und des Trägheits-Momentes der Nadel, indem ihr System erschwert wird. Dadurch werden allerdings die grossen Schwankungen noch vergrössert, aber diese können dadurch beseitigt werden, dass die Nadel in arretiertem Zustande in einem um die Axe des Instrumentes beweglichen Kasten gedreht werden kann und erst ungefähr nach Norden gerichtet wird, bevor sie in Wirkung tritt. Hierdurch wird die Beobachtung kaum verzögert, und wir haben es nur noch mit kleinen Schwankungen zu thun.

2. Durch Anbringung einer Luftdämpfung, dadurch dass die Nadel, in Lamellen-Form ausgebildet, hochkant gestellt wird und so per se dämpfend wirkt oder evtl. durch Führung eines an dem Drehpunkt der Nadel angebrachten Hebels in einer Dämpfungsvorrichtung.
3. Durch Anbringung einer Kupferdämpfung, indem die Pole der Nadel zwischen zwei dicken Kupferstreifen schwebend angeordnet werden.

Hierdurch glauben wir die sichere Mitführung des Nonius durch die Nadel zu ermöglichen und so die Genauigkeit des Instrumentes bedeutend zu erhöhen. Wie weit dies möglich ist, kann erst durch Konstruktion nachgewiesen werden; es scheint uns aber nicht allzu schwierig, die Erfüllung unseres Prinzips auf diese Weise zu erreichen. Die definitive Lösung dieser Aufgabe muss jedoch für später vorbehalten bleiben.